
منتدى توجيه الرياضيات
الرياضيات
الصف الثالث
الأعدادى
مذكرة الجبر
الترم الثانى
تقديم
م/عادل ادوار

الوحدة الأولى

المعادلات

(١) حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً وبيانياً

(٢) حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا وجبرياً

(٣) حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

(٤) تمارين على الوحدة

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً و بيانياً

تمهيد : نعلم أن :

(ﺃ) المعادلة : هى جملة رياضية تتضمن علاقة تساوى بين عبارتين رياضيتين

(ب) المعادلة : ٣ س + ١ = ١٠ من الدرجة الأولى فى متغير واحد

(حـ) حل المعادلة : هو التوصل إلى قيمة المجهول (الرمز) الموجود بالمعادلة

(ء) خواص علاقة التساوى :

إذا كان ﺃ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد فى " ط ، صـ " فإن :

(١) الإضافة : إذا كان : ﺃ = ب فإن : ﺃ + حـ = ب + حـ

فمثلا : إذا كان : ﺃ – ١ = ٣ فإن : ﺃ = ٤ (بإضافة ١ للطرفين)

(٢) الحذف : إذا كان : ﺃ = ب فإن : ﺃ – حـ = ب – حـ

فمثلا : إذا كان : ﺃ + ٣ = ٧ فإن : ﺃ = ٤ (بطرح ٣ من الطرفين)

(٣) الضرب : إذا كان : ﺃ = ب فإن : ﺃ × حـ = ب × حـ

فمثلا : إذا كان ﺃ/٣ = ٤ فإن : ﺃ = ١٢ (بضرب الطرفين × ٣)

(٤) القسمة : إذا كان ﺃ = ب فإن : ﺃ ÷ حـ = ب ÷ حـ ، حيث : حـ ≠ صفر

فمثلا : إذا كان ٥ ﺃ = ١٥ فإن : ﺃ = ٣ (بقسمة الطرفين على ٥)

٢– (ﺃ) المعادلة : ﺃ س + ب ص + حـ = ٠ حيث : ﺃ ، ب ، حـ ثوابت

تسمى معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين هما س ، ص

(ب) حل هذه المعادلة يعنى إيجاد مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) التى تحقق المعادلة بحيث تكون مجموعة التعويض هى : ع × ع ما لم يذكر خلاف ذلك

فمثلاً : لحل المعادلة س + ص = ٦

بإستخدام خواص التساوى يمكن وضع المعادلة على الصورة :

س = ٦ – ص أو الصورة : ص = ٦ – س

و بإعطاء قيم للمتغير بالطرف الأيسر يمكن حساب قيمة المتغير بالطرف الأيمن كما يلى : فى الصورة : س = ٦ – ص

عند ص = ١ ∴ س = ٦ – ١ = ٥ ∴ (٥ ، ١) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = ٢ ∴ س = ٦ – ٢ = ٤ ∴ (٤ ، ٢) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = ٣ ∴ س = ٦ – ٣ = ٣ ∴ (٣ ، ٣) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = $\sqrt{٥}$ ∴ س = ٦ − $\sqrt{٥}$

∴ (٦ − $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٦ − $\frac{١}{٢}$ = ٥ $\frac{١}{٢}$

∴ (٥ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) يكون حلاً للمعادلة .... و هكذا

(حـ) مثل هذه المعادلة يكون لها عدد لا نهائى " غير منته " من الحلول
و يمكن أن تكتب مجموعة حل المعادلة على الصورة :
مجموعة الحل = { (س ، ص) : س = ٦ − ص }

(٤) كل الأزواج المرتبة التى تكون حلاً للمعادلة يمكن تمثيلها بنقط على المستوى الإحداثى و بتوصيل هذه النقط نحصل على الخط المستقيم الذى يمثل المعادلة بيانياً

****

أولاً : حل معادلات الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

مثــ١ــال : أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ س − ص = ٥ بيانياً

الحـــــــــل

نكتب المعادلة على الصورة : ص = ٢ س − ٥

بوضع س = ١ ∴ ص = −٣

∴ (١ ، −٣) يكون حلاً للمعادلة

بوضع س = ٣ ∴ ص = ١

∴ (٣ ، ١) يكون حلاً للمعادلة

برسم المستقيم ل المار بالنقطتين الممثلتين للزوجين المرتبين (١ ، −٣) ، (٣ ، ١) نجد أن كل نقطة ∋ ل تمثل حلاً للمعادلة

أى أن : المعادلة : ٢ س − ص = ٥ لها عدد لا نهائى من الحلول

****

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين :

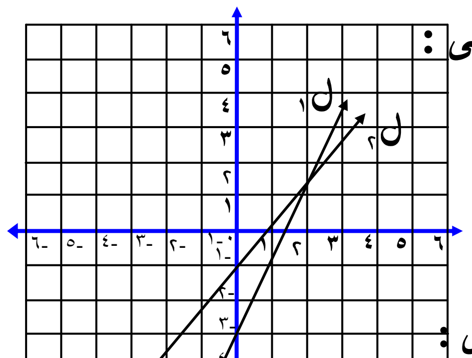
إذا كان لدينا المعادلتين :

$أ_١$ س + $ب_١$ ص + $حـ_١$ = ٠ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص + $حـ_٢$ = ٠

فإن حل هاتين المعادلتين معاً يقصد به إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق كلاً منهما فى آن واحد لذا يسمى حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى متغيرين و نحصل عليها من تقاطع المستقيمين الممثلين لكل منهما حيث تكون نقطة التقاطع هى الحل المشترك للمعادلتين

مثـ٢ـال : أوجد مجموعة حل المعادلة : ص = ٢ س – ٣ ، ص = س – ١

الحـــــــــل



لتمثيل المعادلة الأولى بيانياً بالخط المستقيم ل١ نكون الجدول التالى :

ص = ٢ س – ٣

س	٠	١	٢
ص	– ٣	– ١	١

لتمثيل المعادلة الثانية بيانياً بالخط المستقيم ل٢ نكون الجدول التالى :

ص = س – ١

س	٠	١	٢
ص	– ١	٠	١

و نرسم كلاً من المستقيمين على نفس المستوى الإحداثى نوجد نقطة تقاطعهما فتكون هى مجموعة الحل ∴ مجموعة الحل = { (٢ ، ١) }

****

مثـ٣ـال : أوجد مجموعة حل المعادلة : س + ص = ٥ ، س – ص = ١

الحـــــــــل

لتمثيل المعادلة الأولى بيانياً بالخط المستقيم ل١ نكون الجدول التالى :

ص = ٥ – س

س	٠	١	٥
ص	٥	٤	٠

لتمثيل المعادلة الثانية بيانياً بالخط المستقيم ل٢ نكون الجدول التالى :

ص = س – ١

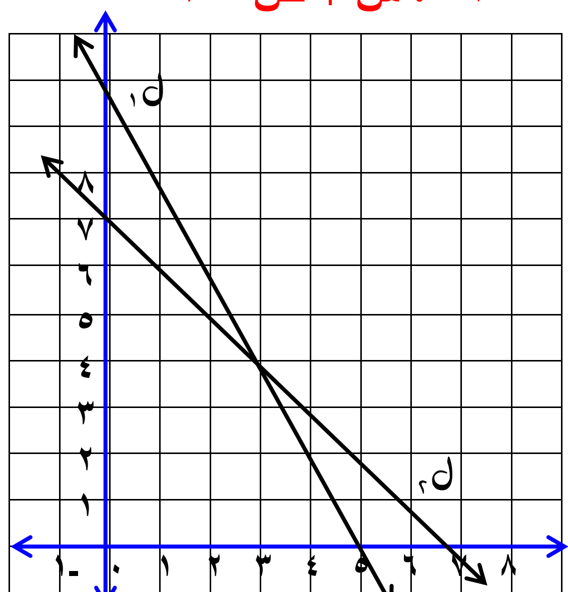
س	٠	١	٢
ص	– ١	٠	١

و نرسم كلاً من المستقيمين على نفس المستوى الإحداثى نوجد نقطة تقاطعهما فتكون هى مجموعة الحل

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ٢) }

****

مثــ٤ــال : أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢س + ص = ١٠ ، س + ص = ٧



الحــــــــــل

لتمثيل المعادلة الأولى بيانياً بالخط المستقيم ل١ نكون الجدول التالى :

ص = ١٠ ـ ٢ س

س	٥	٤	٣
ص	٠	٢	٤

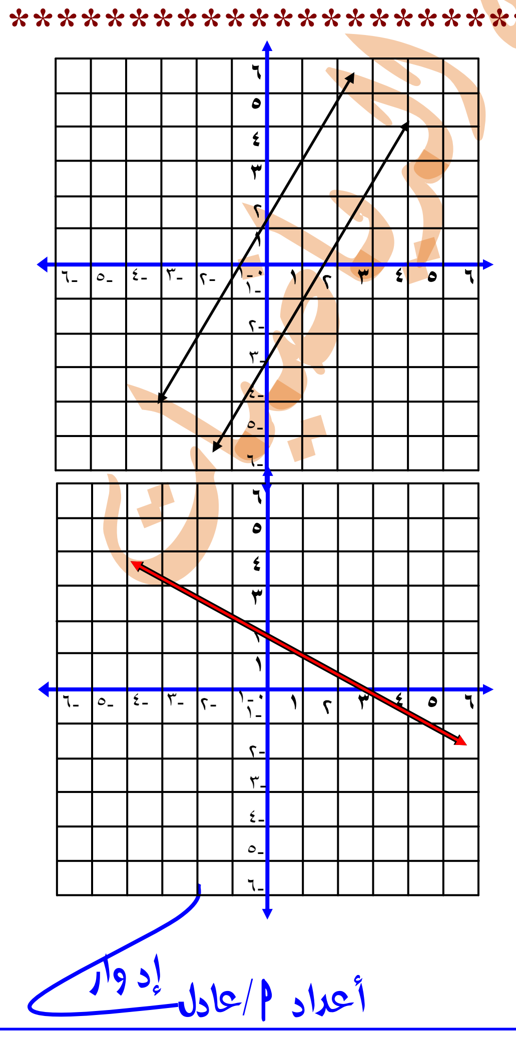
لتمثيل المعادلة الثانية بيانياً بالخط المستقيم ل٢ نكون الجدول التالى :

ص = ٧ ـ س

س	٥	٤	٢
ص	٢	٣	٥

و نرسم كلاً من المستقيمين على نفس المستوى الإحداثى نوجد نقطة تقاطعهما فتكون هى مجموعة الحل　　∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ٤) }

****



حالات خاصة :

١ـ المستقيمان متوازيان :

مجموعة الحل = ∅

تساوى أو تناسب معاملى المتغيرين فى المعادلتين

ميلا المستقيمان متساويان

مثال :



ص = ٢ س ـ ٣ ، ٢ ص = ٤ س + ٢

٢ـ المستقيمان منطبقان :

مجموعة الحل = عدد غير منته من الحلول

تساوى أو تناسب معاملى المتغيرين فى المعادلتين

و كذا تساوى الحد المطلق فى كلا المعادلتين

ثانياً : حل معادلات الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً

مثال :

س + ٢ ص = ٣ ، ٢ س + ٤ س = ٦

توجد طريقتان هما :

١ـ **طريقة التعويض :** و فيها نستخدم إحدى المعادلتين لإيجاد أحد المتغيرين بدلالة الآخر ثم نعوض عنه فى المعادلة الثانية فتحصل على معادلة فى متغير واحد و بحلها نحصل على قيمة هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

٢ـ **طريقة الحذف :** و فيها نجعل معاملى أحد المتغيرين فى المعادلتين كل منهما معكوساً جمعياً للآخر و بإجراء عملية جمع المعادلتين نحذف هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

****

مثـ١ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين :

٢ س + ص = ٥ (١) ، س ـ ص = ١ (٢)

الحـــــــــــل

أولاً : (طريقة التعويض)

من المعادلة (١) ص = ٥ ـ ٢ س بالتعويض فى المعادلة (٢)

∴ س ـ (٥ ـ ٢ س) = ١ ∴ س ـ ٥ + ٢ س = ١

∴ ٣ س ـ ٥ = ١ ∴ ٣ س = ٦ ∴ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ٢ × ٢ + ص = ١ ∴ مجموعة الحل = { (٢ ، ١) }

ثانياً : (طريقة الحذف)

" واضح أن معاملى ص فى المعادلتين كل منهما معكوساً جمعياً للآخر "

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

ينتج : ٢ س + ص = ٥

س ـ ص = ١

∴ ٣ س = ٦ ∴ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ٢ × ٢ + ص = ١

∴ مجموعة الحل = { (٢ ، ١) }

مثـ٢ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين :

٤ س + ٣ ص = ٦　　(١)　　،　　س – ٢ ص = ٧　　(٢)

الحـــــــــل

بضرب طرفى المعادلة (٢) × – ٤　　فتكون على الصورة :

– ٤ س + ٨ ص = – ٢٨

، المعادلة (١) هى :　　٤ س + ٣ ص = ٦　　بالجمع

١١ ص = – ٢٢　　∴ ص = – ٢

بالتعويض فى المعادلة (١)　∴ ٤ س + ٣ × – ٢ = ٦

∴ ٤ س = ١٢　　∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، – ٢) }

حل آخـــــــــر

بضرب طرفى المعادلة (١) × ٢　　فتكون على الصورة :　٨ س + ٦ ص = ١٢

، بضرب طرفى المعادلة (٢) × ٣　　فتكون على الصورة :　٣ س – ٦ ص = ٢١

بالجمع ١١ س = ٣٣　　∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة (١)　∴ ١٢ + ٣ ص = ٦

∴ ٣ ص = – ٦　　∴ ص = – ٢

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، – ٢) }

ملاحظة :

يمكن التحقق من الحل و ذلك بالتعويض عن قيمة كل المتغيرين فى المعادلتين كالتالى : نضع　س = ٣　،　ص = – ٢

فى المعادلة (١) :

الطرف الأيمن = ٤ × ٣ + ٣ × – ٢ = ١٢ – ٦ = ٦ = الطرف الأيسر

فى المعادلة (٢) : الطرف الأيمن = ٣ – ٢ × – ٢ = ٧ = الطرف الأيسر

∴ (٣ ، – ٢) يحقق كلا المعادلتين

****

مثـ٣ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢س + ص = ١١ ، س – ص = ١

الحــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض

٢س + ص = ١١

س – ص = ١ بالجمع

٣ س = ١٢ ∴ س = ٤

بالتعويض فى المعادلة الاولى ٢(٤) + ص = ١١

ص = ١١ ـ ٨ = ٣ ∴ م ٠ ح = { (٤ ، ٣) }

****

مثـ٤ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢س + ص = ٧ ، س +٣ ص = ٦

الحــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض بضرب المعادلة الاولى فى ٣

٦س +٣ ص = ٢١

س + ٣ ص = ٦ بالطرح

٥ س = ١٥ ∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الاولى ٢(٣) + ص = ٧

ص = ٧ ـ ٦ = ١ ∴ م ٠ ح = { (٣ ، ١) }

****

مثـ٥ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢س + ص = ١٠ ، س + ص = ٧

الحــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض

٢س + ص = ١٠

س + ص = ٧ بالطرح

∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الثانية ٣ + ص = ٧

ص = ٧ ـ ٣ = ٤ ∴ م ٠ ح = { (٣ ، ٤) }

****

مثـ٦ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين س + ص = ٥ ، س – ص = ١

الحــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض

س + ص = ٥

س – ص = ١ بالجمع

٢ س = ٦ ∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الاولى ٣ + ص = ٥

ص = ٥ ـ ٣ = ٢ ∴ م ٠ ح = { (٣ ، ٢) }

****

مسائل لفظية تؤول إلى معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين :

فى هذه المسائل يجب قراءة المسألة جيداً و تحديد المتغيرين (المجهولين) و فرضهما " س ، ص مثلاً " و إستخدام معطيات المسألة لتكوين المعادلتين ثم حلهما معاً كما سبق

****

مثــ٧ــال : مستطيل طوله يزيد عن ضعف عرضه بمقدار ٥ سم ، و محيطه ٣٤ سم أوجد مساحته

الحـــــــــل

نفرض أن الطول = س سم ، العرض = ص سم

∴ س – ٢ ص = ٥ (١) ، (س + ص) × ٢ = ٣٤

أى أن : ٢ س + ٢ ص = ٣٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج : ٣ س = ٣٩ ∴ س = ١٣

بالتعويض فى (١) ينتج : ١٣ – ٢ ص = ٥ ∴ ص = ٤

∴ الطول = ١٣ سم ، العرض = ٤ سم

∴ مساحة المستطيل = ١٣ × ٤ = ٥٢ سم^{٢}

****

تمـــارين

(١) أكمل ما يلى :

[١] المستقيمان ص = ٣ ، س = ١ متقاطعان فى النقطة ٠٠٠٠

[٢] مجموعة الحل للمعادلتين س = ١ ، س + ص = ٢ هى ٠٠٠٠

[٣] مجموعة حل المعادلتين س – ص = ٣ ، س + ص = ٥ هى ٠٠٠٠

[٤] مجموعة حل المعادلتين س – ص = ٤ ، ٣ س + ٤ ص = ٥ هى { (٣ ، ٠٠٠٠٠) }

[٥] عدد حلول المعادلتين س – ٢ ص = ٥ ، ٣ س – ٢ ص = ٧ هو ٠٠٠٠

[٦] عدد حلول المعادلتين س + ٢ ص = ٢ ، س +٢ ص = ٣ هو ٠٠٠٠

[٧] إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٤ ص = ٣ ، س + ك ص = ٩ متوازيان فإن : ك = ٠٠٠٠

[٨] إذا كان للمعادلتين س + ٤ ص = ٣ ، ٣ س + ك ص = ٩ عدد غير منته من الحلول فإن : ك = ٠٠٠٠

[٩] إذا كان للمعادلتين س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ك ص = ٢ حل وحيد

فإن : ك لا يمكن أن = ٠٠٠٠٠

(٢) أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات التالية جبرياً و بيانياً :

[١] س – ص = ٣ ، س + ص = ٧

[٢] س + ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٨

[٣] ٣ س + ص = ٦ ، ص = ٧ – ٣ س

[٤] س + ص = ٢ ، ٢ س – ص + ٨ = ٠

[٥] ٣ س + ٤ ص = ٧ ، ٢ س + ص = ٣

[٦] س = ص ، س + ٢ ص = ٦

(٣) إذا كان المستقيمان : م س + ب ص = ٣ ، ٢ م س – ٣ ب ص = ١٦

يتقاطعان فى النقطة (– ١ ، ٢) أوجد قيمة كل من م ، ب

(٤) مثل بيانياً كل من المستقيمين الممثلين للمعادلتين:

س – ص + ٢ = ٠ ، ٢ س + ٣ ص = ٦

ثم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين هذين المستقيمين و محور السينات

(٥) مستطيل طوله أربعة أمثال عرضه و محيطه ٣٠ سم أوجد بعداه

(٦) إذا كان عدد البنات فى إحدى المدارس يزيد عن عدد البنين بمقدار ٥٠ ، و كان ثلاثة أمثال عدد البنات يقل عن ضعف عدد البنين بمقدار ٥٠ أوجد عدد كل من البنين و البنات

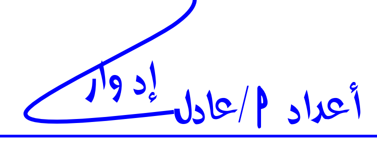
(٧) عدد مكون من رقمين مجموعهما ٩ ، و إذا تغير وضعا الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧ فما العدد الأصلى

(٨) مجموع عمرى رجل و أبنه الآن ٥٠ سنة و بعد ٥ سنوات يكون عمر الرجل مساوياً ثلاثة أمثال عمر أبنه أوجد عملا كل منهما الآن

(٩) فى الحفلة السنوية لمدرسة تم بيع ٢٩٢ تذكرة و كان ثمن بيع التذكرة للطالب جنيها واحداً وللمرافق ٣ جنيهات فإذا كانت التذاكر المباعة ٤٧٠ تذكرة أوجد عدد التذاكر المبيعة من كل نوع

(١٠) بطاريتان تنتجان جهداً كلياً قدره ٤,٥ من الفولت ، الفرق فى الجهد بينهما ١,٥ من الفولت أوجد جهد كل منهما

****



حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانياً و جبرياً

تمهيد :

[١] سبق أن مثلنا الدالة التربيعية :

د (س) = أ س^٢ + ب س + حـ ، أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

[٢] المعادلة المناظرة لها هى : د (س) = ٠ أى : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠

[٣] سبق حل هذه المعادلة بالتحليل

****

مثـــال : أوجد مجموعة حل المعادلة : س^٢ – ٥ س + ٤ = ٠ جبرياً

الحـــــل

بتحليل الطرف الأيمن للمعادلة ينتج :

(س – ٤) (س – ١) = ٠

∴ س = ٤ أو س = ١

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ١ }

****

أولاً : الحل البيانى :

لحل المعادلة : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠ بيانياً نتبع التالى :

(١) نرسم منحنى الدالة د حيث

د (س) = أ س^٢ + ب س + حـ ، أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

(٢) نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات فتكون هى مجموعة الحل

****

ملاحظات :

تحتوى مجموعة الحل على :

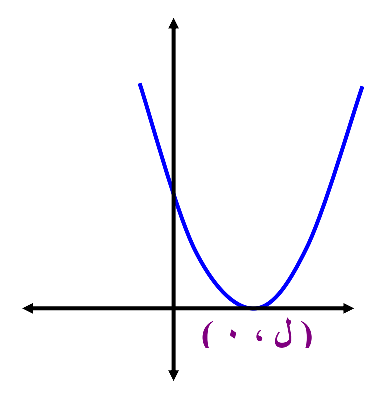
(١)عنصرين إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين

يوجد حلان للمعادلة فى ح مجموعة الحل = { ل ، م }

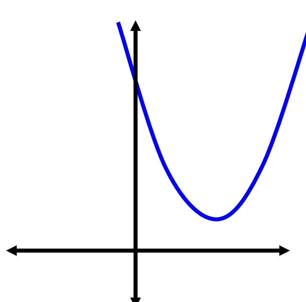
(م ، ٠) (ل ، ٠)

أعداد أ/عادل إدوار

(٢) عنصر واحد إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة



مجموعة الحل = { ل }　يوجد حل وحيد للمعادلة فى ح



(٣) لا توجد عناصر إذا كان المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطة

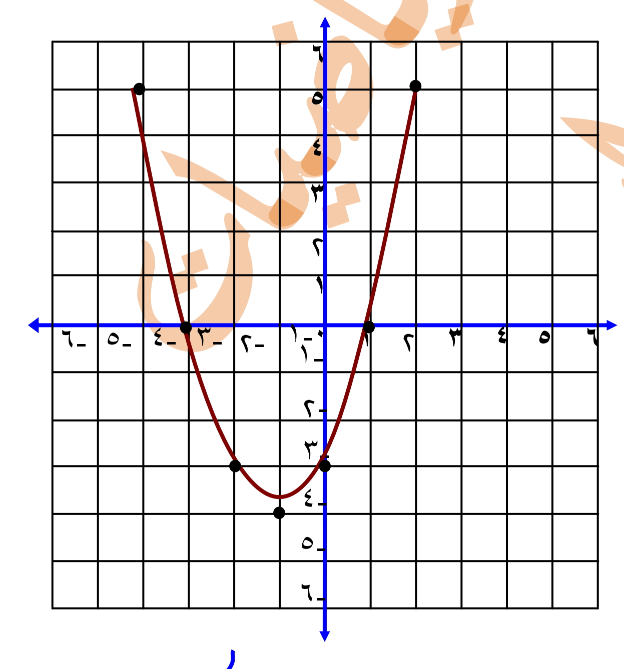
لا يوجد حل للمعادلة فى ح　مجموعة الحل = ∅

****

مثـــال ٢ : إرسم منحنى الدالة د (س) = س^{٢} + ٢ س – ٣ على الفترة [– ٤ ، ٢] و من الرسم أوجد جذرى المعادلة س^{٢} + ٢ س – ٣ = ٠

الحــــــــل

نعين بعض الأزواج المرتبة التى تنتمى لبيان الدالة د و التى ينتمى مسقطها الأول س إلى [– ٤ ، ٢] كما سبق كالتالى



د (–٤) = (–٤)^{٢} + ٢ × (–٤) – ٣ = ٥

د (–٣) = (–٥)^{٢} + ٢ × (–٣) – ٣ = ٠

د (–٢) = (–٢)^{٢} + ٢ × (–٢) – ٣ = –٣

د (–١) = (–١)^{٢} + ٢ × (–١) – ٣ = –٤

د (٠) = (٠)^{٢} + ٢ × (٠) – ٣ = –٣

د (١) = (١)^{٢} + ٢ × (١) – ٣ = ٠

د (٢) = (٢)^{٢} + ٢ × (٢) – ٣ = ٥

نكون الجدول التالى ثم نعين النقاط التى تمثل الأزواج المرتبة فى المستوى الديكارتى :

س	ـ ٤	ـ ٣	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢
ص = د (س)	٥	٠	ـ ٣	ـ ٤	ـ ٣	٠	٥

نمثل هذه الأزواج المرتبة بنقط على المستوى الإحداثى و نصل بينها بخط منحنى فيكون التمثيل البيانى للدالة من الرسم نجد أن منحنى الدالة يقطع محور السينات فى النقطتين (ـ ٣ ، ٠) ، (١ ، ٠)

يسمى العددان ـ ٣ ، ١ جذرى المعادلة س^{٢} + ٢ س ـ ٣ = ٠

و تكون مجموعة الحل للمعادلة س^{٢} + ٢ س ـ ٣ = ٠ هى { ـ ٣ ، ١ }

****

مثــ٣ــال : عين جذرى المعادلة س^{٢} ـ ٤ = ٠ بيانيا

الحــــــــل

س	س^{٢}	ـ٤	د(س)	النقطة
ـ٣	٩	ـ٤	٥	(ـ٣، ٥)
ـ٢	٤	ـ٤	٠	(ـ٢ ، ٠)
ـ١	١	ـ٤	ـ٣	(ـ١، ـ٣)
٠	٠	ـ٤	ـ٤	(٠، ـ٤)
١	١	ـ٤	ـ٣	(١ ، ـ٣)
٢	٤	ـ٤	٠	(٢، ٠)
٣	٩	ـ٤	٥	(٣ ، ٥)

نكون الجدول التالى ثم نعين النقاط التى تمثل الأزواج المرتبة فى المستوى الديكارتى :

س	ـ ٣	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢	٣
ص = د (س))	٥	٠	ـ ٣	ـ ٤	ـ ٣	٠	٥

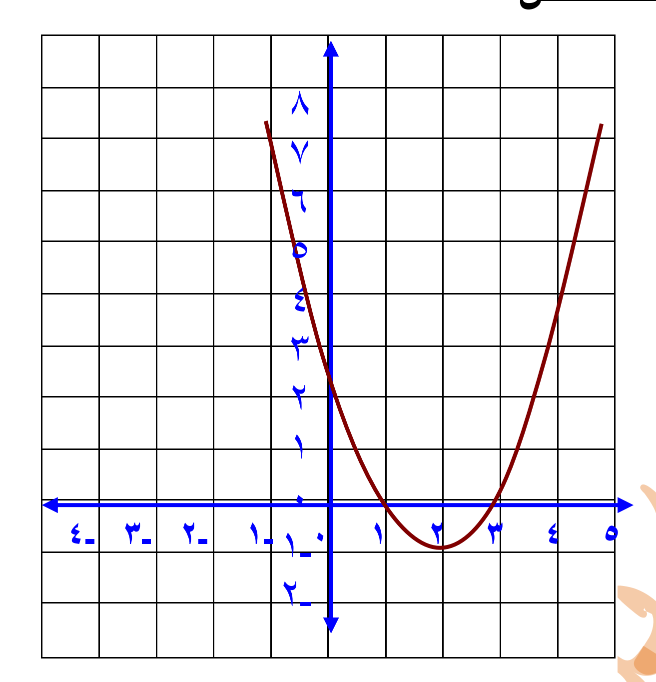
نمثل هذه الأزواج المرتبة بنقط على المستوى الإحداثى و نصل بينها بخط منحنى فيكون التمثيل البيانى للدالة من الرسم نجد أن منحنى الدالة يقطع محور السينات فى النقطتين (ـ ٢ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

يسمى العددان ـ ٢ ، ٢ جذرى المعادلة س^{٢} ـ ٤ = ٠

و تكون مجموعة الحل للمعادلة س^{٢} + ٢ س ـ ٣ = ٠ هى { ـ ٢ ، ٢ }

مثـــ٤ــال : أوجد بيانيا مجموعة الحل للمعادلة　　س٢ – ٥س + ٦ = ٠

الحــــــــــل



س	س٢	-٥س	٦	د(س)	النقطة
٠	٠	٠	٦	٦	(٣ ، ٠)
١	١	-٥	٦	٢	(٠ ، ١)
٢	٤	-١٠	٦	٠	(٢، -١)
٣	٩	-١٥	٦	٠	(٠، ٣)
٤	١٦	-٢٠	٦	٢	(٣، ٤)
٥	٢٥	-٢٥	٦	٦	(٨ ، ٥)

م ٠ ح = { ١ ، ٣ }

****

مثـــ٥ــال : أوجد بيانيا مجموعة الحل للمعادلة　　س – س٢ + ٢ = ٠

الحــــــــــل

س	س	- س٢	+٢	د(س)	النقطة
-٣	-٣	-٩	٢	-١٠	(-٣ ، -١٠)
-٢	-٢	-٤	٢	-٤	(-٢ ، -٤)
-١	-١	-١	٢	٠	(-١ ، ٠)
٠	٠	٠	٢	٢	(٠ ، ٢)
١	١	-١	٢	٢	(١ ، ٢)
٢	٢	-٤	٢	٠	(٢ ، ٠)
٣	٣	-٩	٢	-٤	(٣ ، -٤)
٤	٤	-١٦	٢	-١٠	(٤ ، -١٠)

م ٠ ح = { -١ ، ٢ }

****

ثانياً : الحل الجبرى بإستخدام القانون العام

تمهيد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٤ س + ١ = ٠$ مستعيناً بفكرة إكمال المربع

الحـــــــل

$\because$ $س^{٢} + ٤ س + ١ = ٠$

$\therefore$ $س^{٢} + ٤ س = -١$ بإضافة ٤ للطرفين " مربع نصف معامل س "

$\therefore$ $س^{٢} + ٤ س + ٤ = -١ + ٤$

$\therefore$ $(س + ٢)^{٢} = ٣$

$\therefore$ $س + ٢ = \sqrt{٣}$ أو $س + ٢ = -\sqrt{٣}$

$\therefore$ $س = -٢ + \sqrt{٣}$ أو $س = -٢ - \sqrt{٣}$

****

القانون : مجموعة حل المعادلة $أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠$ مستعيناً بفكرة إكمال المربع

الحـــــــل

$\because$ $أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠$ بضرب الطرفين فى ٤ أ

$\therefore$ $٤ أ^{٢} س^{٢} + ٤ أ ب س + ٤ أ حـ = ٠$ بإكمال المربع " بإضافة $ب^{٢}$ للطرفين

$\therefore$ $٤ أ^{٢} س^{٢} + ٤ أ ب س + ب^{٢} = ب^{٢} - ٤ أ حـ$

$\therefore$ $٢ أ س + ب = \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}$

$\therefore$ $٢ أ س = -ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}$

$\therefore$ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

- يمكن حل معادلة الدرجة الثانية $أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠$ ، أ ، ب ، حـ $\in ح$ ، $أ \neq ٠$ بإستخدام القانون العام :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$ حيث : أ ، ب ، حـ $\in ح$ ، $أ \neq ٠$

أ معامل $س^{٢}$ ، ب معامل س ، حـ الحد المطلق

مثـ١ـال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : ٥ س^{٢} + ٢ س − ٤ = ٠

مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحـــــــل

∵ ٥ س^{٢} + ٢ س − ٤ = ٠

∴ ا = ٥ ، ب = ٢ ، حـ = − ٤

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{ا}\,\text{حـ}}}{٢\,\text{ا}} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ٥ \times (-٤)}}{٢ \times ٥} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٨٤}}{١٠}$

∴ $\text{س} = \frac{-٢ + \sqrt{٨٤}}{١٠} = ٠.٠٧١٦$ ، $\text{س} = \frac{-٢ - \sqrt{٨٤}}{١٠} = -١.١١٦$

∴ مجموعة الحل = { ٠.٠٧١٦ ، − ١.١١٦ }

****

مثـ٢ـال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٢ س − ١ = ٠

مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــــل

∵ س^{٢} − ٢ س − ١ = ٠

∴ ا = ١ ، ب = − ٢ ، حـ = −١

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{ا}\,\text{حـ}}}{٢\,\text{ا}} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times (-١)}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٨}}{٢}$

∴ $\text{س} = \frac{١ + \sqrt{٢}}{١} = ٢.٤١٤٢$ ، $\text{س} = \frac{١ - \sqrt{٢}}{١} = -٠.٤١٤٢$

∴ مجموعة الحل = { ٢.٤ ، − ٠.٤ }

****

مثـ٣ـال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٤ س − ٢ = ٠

مقرباً الجواب لرقمين عشريين

الحـــــــل

∵ س^{٢} − ٤ س − ٢ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ـ ٤ ، حـ = ـ٢

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times (-٢)}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$

∴ $س = \frac{٢ + \sqrt{٦}}{١} = ٤.٤٤٩٤$ ، $س = \frac{٢ - \sqrt{٦}}{١} = ـ ٠.٤٤٩٤$

∴ مجموعة الحل = { ٤.٤٥ ، ـ ٠.٤٥ }

****

مثــ٤ــال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^٢ ـ ٢ س ـ ٤ = ٠

مقرباً الجواب لرقمين عشريين

الحـــــــل

∵ س^٢ ـ ٢ س ـ ٤ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ـ٢ ، حـ = ـ ٤

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times (-٤)}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$

∴ $س = \frac{١ + \sqrt{٥}}{١} = ٣.٢٣٦٠$ ، $س = \frac{١ - \sqrt{٥}}{١} = ـ ١.٢٣٦٠$

∴ مجموعة الحل = { ٣.٢٣ ، ـ ١.٢٣ }

****

مثــ٥ــال: أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٣س^٢ ـ ٥ س ـ ١ = ٠

مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــــل

∵ ٣ س^٢ ـ ٥ س ـ ١ = ٠

∴ أ = ٣ ، ب = ـ ٥ ، حـ = ـ ١

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \times (-١)}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{٣٧}}{٦}$

∴ $س = \frac{٥ + \sqrt{٣٧}}{٦} = ١.٨٤٧١$ ، $س = \frac{٥ - \sqrt{٣٧}}{٦} = ـ ٠.١٨٠٤$

∴ مجموعة الحل = { ١.٨ ، ـ ٠.٢ }

****

مثـ٦ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة س٢ = ٢ (س + ٣)
مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــل

س٢ = ٢ س + ٦		س٢ – ٢ س- ٦ = ٠

ﺃ = ١		ب = –٢		جـ = -٦

ب٢ – ٤ أ جـ = (–٢)٢ – ٤ × ١ × -٦ = ٤+٢٤ = ٢٨

∴ ﺃ = ١ ، ب = –٤ ، حـ =

∴ س = $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ ﺃ حـ}}{٢ ﺃ}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٢}$

∴ س = $\frac{١ + \sqrt{٧}}{١}$ = ٣.٦٤٥٧ ، س = $\frac{١ - \sqrt{٧}}{١}$ = –١.٦٤٥٧

∴ مجموعة الحل = { ٣.٦ ، –١.٦ }

****

مثـ٧ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة (س – ٢)٢ = ٦
مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــل

س٢ - ٤ س + ٤ = ٦		س٢ – ٤ س - ٢ = ٠

∴ ﺃ = ١ ، ب = –٤ ، حـ = –٢

∴ س = $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ ﺃ حـ}}{٢ ﺃ}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times (-٢)}}{٢ \times ١}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$

∴ س = $\frac{٢ + \sqrt{٦}}{١}$ = ٤.٤٤٩٤ ، س = $\frac{٢ - \sqrt{٦}}{١}$ = –٠.٤٤٩٤

∴ مجموعة الحل = { ٤.٤٥ ، –٠.٤٥ }

****

مثـ٨ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة س (س – ٣) = ٩
مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــل

س٢ – ٣ س = ٩		س٢ – ٣ س – ٩ = ٠

∴ ٱ = ١ ، ب = –٣ ، حـ = –٩

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ٱ حـ}}{٢ ٱ}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times (-٩)}}{٢ \times ١}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{٤٥}}{٢}$

∴ س = $\frac{٣ + ٣\sqrt{٥}}{٢}$ ≃ ٤.٨٥٤١ ، س = $\frac{٣ - ٣\sqrt{٥}}{٢}$ = –١.٨٥٤١

∴ مجموعة الحل = { ٤.٩ ، –١.٩ }

****

مثـ٩ـال : رأى ثعبان على الأرض صقراً على إرتفاع ١٦٠ متراً منه و هو ينطلق إليه بسرعة ٢٤ متراً / الدقيقة لكى ينقض عليه ، فإذا كان الصقر ينطلق رأسياً لأسفل حسب

العلاقة : ف = ع. ن + ٤,٩ ن^٢ حيث ف المسافة بالمتر ، ع. سرعة إنطلاق الصقر بالمتر / دقيقة ، ن الزمن بالدقائق أوجد الزمن الذى يأخذه الثعبان لكى يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر

الحـــــــــل

∵ ف = ع. ن + ٤,٩ ن^٢ ، ف = ١٦٠ ، ع. = ٢٤

∴ ١٦٠ = ٢٤ ن + ٤,٩ ن^٢ ∴ ٤,٩ ن^٢ + ٢٤ ن – ١٦٠ = ٠

∴ ن = $\frac{-٢٤ \pm \sqrt{٥٧٦ - ٤ \times ٤,٩ \times (-١٦٠)}}{٢ \times ٤,٩}$

∴ ن = ٣,٨ أو ن = –٨,٧ مرفوض

∴ الزمن الذى يأخذه الثعبان لكى يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر = ٣,٨ دقيقة

****

تمارين

(١) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية بإستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقمين عشريين

[١] س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠   [٢] ٢ س^{٢} + ٥ س − ٦ = ٠

[٣] ٥ س^{٢} − ٣ س = ١   [٤] − س^{٢} + ٢ س + ٢ = ٠

[٥] س (س + ٢) = ٦   [٦] س^{٢} = ٢ (س + ٦)

[٧] (س − ٢)^{٢} = ٦   [٨] س − $\frac{\text{س}}{٣}$ = ٣

[٩] ١ + $\frac{٢}{\text{س}}$ = $\frac{٥}{\text{س}^{٢}}$ [١٠] $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ = $\frac{\text{س}}{٢}$

(٢) إرسم الشكل البيانى للدالة د في الفترة المعطاه ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد فى كل مما يلى :

[١] د (س) = س^{٢} + ٤ س + ٥   فى [−٤ ، ٠]

[٢] د (س) = س^{٢} − ٥   فى [−٤ ، ٤]

[٣] د (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س − ١   فى [−١ ، ٣]

[٤] د (س) = ٤ س − س^{٢} فى [−١ ، ٥]

[٥] د (س) = س (س + ١) − ٦   فى [−٤ ، ٣]

[٦] د (س) = ٢ س (س − ١) − (س + ١)^{٢} + ٥   فى [٠ ، ٤]

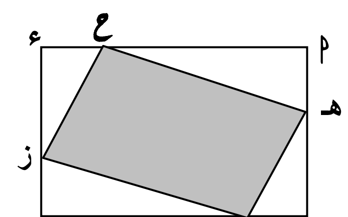
[٧] د (س) = (س + ١)^{٢} − ٥ (س + ١) + ٦   فى [−١ ، ٤]

(٣) إرسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = ٤ س − س^{٢} − ٤ فى [٠ ، ٤] و من الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة ٤ س − س^{٢} − ٤ = ٠

(٤) إرسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩
فى [– ٤ ، ١] و من الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ،
ثم أوجد مجموعة حل المعادلة ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩ = ٠

(٥) فى إحدى مسابقات رمى القرص كان مسار القرص بالنسبة لأحد اللاعبين يتبع العلاقة التالية : ص = ٤,٩ س – ٠,٠٤٣ س^{٢} + ١٣ حيث س تمثل المسافة الأفقية بالمتر ، ص إرتفاع القرص عن سطح الأرض ، أوجد المسافة الأفقية التى يسقط عندها القرص بدءاً من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة

(٦) إذا كانت مساحة أرض زراعية تعطى بالعلاقة : ص = ٢ س^{٢} + ٧ س – ٦
أوجد قيمة س بالمتر التى تجعل ص = ٢٤٠ م^{٢}



(٧) فى الشكل المقابل : م ب حـ ء مستطيل فيه م ب = ١٠ سم
، ب حـ = ١٤ سم فإذا كان م هـ = ب و = حـ ز = ء ع = س سم
أثبت أن : مساحة الشكل هـ و ز ع = ٢ س^{٢} – ٢٤ س + ١٤٠ و أوجد بيانياً
مجموعة حل المعادلة ص = ٢ س^{٢} – ٢٤ س + ١٤٠ عندما ص = ٧٦ سم^{٢}

****

مراجعة علي التحليل

١) التحليل بإخراج (ع . م . م)

١٢ س^{٣} – ٤ س = ٤ س (٣ س^{٢} – ١)

٢) تحليل فرق بين مربعين

٤ س^{٢} – ٩ = (٢ س – ٣) (٢ س + ٣)

٣) تحليل الفرق بين مكعبين :

س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤)

٤) تحليل مجموع مكعبين :

س^{٣} + ١٢٥ = (س + ٥) (س^{٢} – ٥ س + ٢٥)

٥) تحليل المقدار الجبري الثلاثي البسيط " معامل س^{٢} = ١ "

س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

س^{٢} – ٥ س + ٦ = (س – ٣)(س – ٢)

س^{٢} + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)

س^{٢} – ٥ س – ٦ = (س – ٦)(س + ١)

٦) تحليل المقدار الثلاثي غير البسيط " معامل س^{٢} ≠ ١ "

٣ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٣ س^{٢} – ١٩ س + ٦ = (٣ س – ١)(س – ٦)

٣ س^{٢} + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)

٣ س^{٢} – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

٧) المقدار الثلاثى المربع الكامل :

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^{٢}

٢٥ س^{٢} – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^{٢}

****

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية

- حل المعادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية يعنى إيجاد الزوج المرتب أو الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية التى تمثل حلاً مشتركاً للمعادلتين معاً

*** خطوات الحل :**

(١) من معادلة الدرجة الأولى نوجد أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر
(٢) نعوض من معادلة الدرجة الأولى فى معادلة الدرجة الثانية
(٣) نفك الأقواس مع تجميع الحدود المتشابهة ثم التحليل لنحصل على قيم المتغير الأول
(٤) نعوض فى معادلة الدرجة الأولى نحصل على قيم المتغير الأخر

* يعتمد الحل على طريقة التعويض كما يتضح من الأمثلة التالية :

****

مثـــال١ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : س – ص = ٣ , س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

الحــــــــــل

من المعادلة الأولى : س = ٣ + ص

وبالتعويض في المعادلة الثانية: (٣ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

∴ ٩ + ٦ ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ٢٩ ∴ ٢ ص^{٢} + ٦ ص – ٢٠ = ٠

، بالقسمة على ٢ : ص^{٢} + ٣ ص – ١٠ = ٠

، بالتحليل : (ص + ٥)(ص – ٢) = ٠

∴ ص = – ٥ ؛ أ ص = ٢ وبالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ س = ٣ – ٥ = – ٢ ؛ أ س = ٣ + ٢ = ٥

∴ مجموعة الحل = { (٥ ، ٢) , (–٢ ، –٥) }

****

مثـــال٢ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س + ص = ٥ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٣

الحــــل

من المعادلة الاولى ص = ٥ – س و بالتعويض فى المعادلة الثانية

∴ س^{٢} + (٥ – س)^{٢} = ١٣

∴ س^{٢} + ٢٥ – ١٠ س + س^{٢} – ١٣ = ٠

∴ ٢س^{٢} – ١٠ س + ١٢ = ٠

، بالقسمة على ٢ : س^{٢} – ٥ س + ٦ = ٠

، بالتحليل : (س – ٢) (س – ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣ وبالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ ص=٥ – ٢ = ٣ أ، ص = ٥ – ٣ = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢، ٣) ، (٣ ، ٢)}

****

مثـ٣ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س – ص = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

الحـــــل

من المعادلة الاولى س = ٣ + ص وبالتعويض فى المعادلة الثانية

∴ (٣ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

∴ ٩+ ٦ ص + ص^{٢} + ص^{٢} – ٢٩ = ٠

∴ ٢ص^{٢} + ٦ ص – ٢٠ = ٠

، بالقسمة على ٢ : ص^{٢} + ٣ ص – ١٠ = ٠

، بالتحليل : (ص + ٥)(ص – ٢) = ٠

∴ ص = - ٥ أ، ص = ٢ وبالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ س=٣+(-٥) = -٢ أ، س = ٣+٢= ٥

∴ مجموعة الحل = { (-٢ ، -٥) ، (٥ ، ٢) }

****

مثـ٤ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : س = ٥ – ص , س^{٢} – ص^{٢} = ٥٥

الحـــــل

بالتعويض من المعادلة الأولي في الثانية : (٥ – ص)^{٢} – ص^{٢} – ٥٥ = ٠

∴ ٢٥ – ١٠ ص + ص^{٢} – ص^{٢} – ٥٥ =٠

∴ – ١٠ ص – ٣٠ = ٠ ∴ ص + ٣ = ٠ ∴ ص = – ٣

∴ س = ٥ – (– ٣) = ٥ + ٣ = ٨

∴ مجموعة الحل = { (٨ , – ٣) }

****

مثـ٥ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س + ص= ٧ ، س ص = ١٢

الحـــــل

من المعادلة الأولى ص = ٧ – س

و بالتعويض فى المعادلة الثانية ∴ س (٧ – س) = ١٢

∴ ٧س – س^{٢} – ١٢ = ٠   ×-١

بالضرب فى (-١)   ∴ س^{٢} – ٧ س + ١٢ = (س – ٣) (س – ٤) = ٠

∴ س = ٣   أ، س = ٤

∴ ص = ٧ – ٣ = ٤   أ، ص = ٧ – ٤ = ٣

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) }

****

مثـ٦ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س – ص = ٢ ، س ص = ١٥

الحـــل

من المعادلة الأولى   ص = س – ٢

وبالتعويض فى المعادلة الثانية   ∴ س (س – ٢) = ١٥

∴ س^{٢} – ٢ س – ١٥ = (س – ٥) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٥   س = -٣

∴ ص = ٥ – ٢ = ٣   ص = -٣ – ٢ = -٥

∴ م . ح = { (٥ ، ٣) ، (-٣ ، -٥) }

****

مثـ٧ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : ص = ٢ س + ١ , ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ١٣

الحـــل

وبالتعويض من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية :

٤ س^{٢} + (٢ س + ١)^{٢} – ١٣ = ٠

٤ س^{٢} + ٤ س^{٢} + ٤ س + ١ – ١٣ = ٠

٨ س^{٢} + ٤ س – ١٢ = ٠   (بالقسمة علي ٤)

∴ ٢ س^{٢} + س – ٣ = ٠

بالتحليل : (٢ س + ٣) (س – ١) = ٠

إما ٢ س + ٣ = ٠   ومنها : س = – $\frac{٣}{٢}$ أ؛   س – ١ = ٠

ومنها : س = ١   بالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ ص = ٢ × – $\frac{٣}{٢}$ + ١ = – ٢   أ؛   ص = ٢ × ١ + ١ = ٣

∴ مجموعة الحل = { (– $\frac{٣}{٢}$, – ٢) ، (١ ، ٣) }

****

مثـــ٨ـــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س + ص = ٧ ، س^{٢} + س ص = ١٤

الحـــــل

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية ص = ٧ ـ س

∴ س^{٢} + س (٧ ـ س) = ١٤

∴ س^{٢} + ٧ س ـ س^{٢} = ٧ س = ١٤

∴ س = ٢ ومنها ص = ٧ ـ ٢ = ٥

∴ م . ح = { (٢ ، ٥) }

****

مثـــ٩ـــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين ص = ٢ س ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠

الحـــــل

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية س^{٢} + (٢ س)^{٢} = ٢٠

س^{٢} + ٤ س^{٢} = ٢٠

∴ ٥ س^{٢} = ٢٠ ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = $\pm$ ٢

∴ س = ٢ أ، س = ـ٢

∴ ص=٢(٢) = ٤ أ، ص =٢(ـ٢) = ـ٤

∴ م . ح = {(٢ ، ٤) ، (ـ٢ ، ـ٤) }

****

مثـــ١٠ـــال : مجموعة الحل للمعادلتين س + ص = ٥ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ١٩

الحـــــل

من المعادلة الاولى ص = ٥ ـ س بالتعويض فى المعادلة الثانية

∴ س^{٢} + س (٥ ـ س) + (٥ ـ س)^{٢} = ١٩

∴ س^{٢} + ٥ س ـ س^{٢} + ٢٥ ـ ١٠ س + س^{٢} ـ ١٩ = ٠

∴ س^{٢} ـ ٥ س + ٦ = (س ـ ٢)(س ـ ٣) =٠

∴ س = ٢ س = ٣

∴ ص = ٥ ـ ٢ = ٣ ص = ٥ ـ ٣ = ٢

∴ م . ح = { (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) }

****

مثـــ١١ـــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س = ٢ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

الحـــــل

بالتعويض عن س = ٢ فى المعادلة الثانية (٢)^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

∴ ٤ + ص^{٢} = ٢٩

∴ ص^{٢} = ٢٩ ـ ٤ = ٢٥ ∴ ص = $\sqrt{٢٥}$ = $\pm$ ٥

∴ م . ح = { (٢ ، ٥) ، (٢ ، ـ٥) }

مثــ١٢ــال : مجموعة الحل للمعادلتين س=٠ ، ص^{٢} + س^{٢} – ٣س – ٦ ص + ٨ = ٠

الحــــل

بالتعويض من الاولى فى الثانية ص^{٢} + (٠)^{٢} – ٣ (٠) – ٦ ص + ٨ = ٠

∴ ص^{٢} – ٦ ص + ٨ =(ص – ٢)(ص – ٤) = ٠

∴ ص = ٢ أ، ص = ٤ ∴ م . ح = { (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٤) }

****

تطبيقات علي حل معادلتين في متغيرين

خطوات حل التطبيقات :

١ – نفرض أن احد المجهولين س و الأخر ص

٢ – نكون المعادلتين في س , ص من معطيات المسألة

٣ – نحل المعادلتين كالسابق لنحصل علي س , ص

****

مثــ١ـال : عددان مجموعهما ٨ وحاصل ضربهما ١٥ أوجد العددين

الحــــــل

نفرض أن العددين هما : س , ص

∴ س + ص = ٨ , س ص = ١٥

ومن المعادلة الأولي : ص = ٨ – س

وبالتعويض في المعادلة الثانية :

∴ س (٨ – س)= ١٥

∴ ٨ س – س^{٢} – ١٥ =٠ بالضرب × –١

∴ س^{٢} – ٨ س + ١٥ = ٠

وبالتحليل ∴ (س – ٣)(س – ٥) =٠

عندما س = ٣ فان : ص = ٥

، عندما س = ٥ فان ص = ٣ ∴ العددان هما ٥ , ٣

> **فكرة أخرى :**
> بضرب المعادلة الأولى فى س
> ∴ س^{٢} + س ص = ٨ س
> ∴ س^{٢} + ١٥ = ٨ س
> ∴ س^{٢} – ٨ س + ١٥ = ٠
> ثم يكمل الحل بنفس الخطوات

****

مثــ٢ـال : مستطيل محيطه = ٢٠سم ومساحته = ٢٤ أوجد بُعديه

الحــــل

نفرض أن طول المستطيل = س وعرضه = ص

∵ محيطه = ٢٠ ∴ ٢ (س + ص) = ٢٠

∴ س + ص = ١٠ ∴ ص = ١٠ – س (المعادلة الاولى)

∵ مساحة المستطيل = ٢٤   ∴ س ص = ٢٤   (المعادلة الثانية)

بالتعويض من الاولى فى الثانية   ∴ س (١٠ – س) = ٢٤

١٠ س – س^{٢} – ٢٤ = ٠   ×-١

بالضرب × (-١)   ∴ س^{٢} – ١٠ س + ٢٤ = (س – ٤)(س – ٦) = ٠

∴ س = ٤   أ، س = ٦

وبالتعويض فى الاولى   ∴ ص=١٠-٤ =٦   أ، ص=١٠-٦ = ٤

∴أبعاد المستطيل ٤ ، ٦

****

مثـ٣ـال : عددين مجموعهما = ٦ ومجموع مربعيهما = ٢٠ أوجد هذان العددان

الحـــل

نفرض أن العددان هما س ، ص

∵ مجموعهما = ٦   ∴ س + ص = ٦   (١)

∵ مجموع مربعيهما = ٢٠   ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠   (٢)

من المعادلة الأولى   ∴ ص = ٦ – س

بالتعويض من الاولى فى الثانية   س^{٢} + (٦ – س)^{٢} = ٢٠

س^{٢} +٣٦ – ١٢س + س^{٢} – ٢٠ = ٢س^{٢} – ١٢ س + ١٦ = ٠   ÷٢

∴ س^{٢} – ٦ س + ٨ = (س – ٢) (س – ٤) = ٠

∴ س = ٢   أ، س = ٤

وبالتعويض فى الاولى   ص = ٦ – ٢ = ٤   أ، ص= ٦ – ٤ = ٢

∴ العددان هما ٢ ، ٤

****

مثـ٤ـال : يزيد ثلاثة أمثال عمر هانى عن ضعف عمر سامى بمقدار ٢٤ ،
وينقص مجموع مربعيهما عن ثلاثة أمثال حاصل ضرب عمريهما بمقدار ١٧٦
أوجد عمر كل منهما

الحـــــــــل

بفرض أن عمر هانى س سنة ، عمر سامى ص سنة

∴ ٣ س – ٢ ص = ٢٤   و منها : س = $\frac{٢٤ + ٢ص}{٣}$

، ٣ س ص – (س^{٢} + ص^{٢}) = ١٧٦

∴ ٣ ص ($\frac{٢٤ + ٢ص}{٣}$) – ($\frac{٢٤ + ٢ص}{٣}$)^{٢} – ص^{٢} – ١٧٦ = ٠

بالفك و الضرب × ٩ و الإختصار   ∴ ص^{٢} + ٢٤ ص – ٤٣٢ = ٠

∴ (ص + ١٦) (ص – ١٢) = ٠

∴ ص = ١٢ ، س = ١٦

∴ عمر هانى = سنة ، عمر سامى = ١٢ سنة

****

مثـ٥ـال : مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعى القائمة يزيد عن الضلع الاخر بمقدار ٢ وطول وتره = ١٠ سم أوجد محيطه

الحــــل

نفرض أن ضلعى القائمة س ، ص ∴ س – ص = ٢ ∴ ص = س – ٢ (١)

من نظرية فيثاغورث ∴ $س^2 + ص^2 = ١٠٠$ (٢)

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية ∴ $س^2 + (س – ٢)^2 = ١٠٠$

∴ $س^2 + س^2 – ٤ س + ٤ – ١٠٠ = ٠$

$٢س^2 – ٤ س – ٩٦ = ٠$ ÷ ٢

∴ $س^2 – ٢ س – ٤٨ = (س – ٨)(س + ٦) = ٠$

∴ س = ٨ س = ـ ٦ (مرفوضة)

∴ ص = ٨ – ٢ = ٦ ∴ أضلاع المثلث = ٦ ، ٨ ، ١٠

∴ محيطه = ٦+٨+١٠ = ٢٤ سم

****

مثـ٦ـال : مثلث قائم الزاوية مجموع طولى ضلعى القائمة = ٧سم ، طول وتره = ٥سم أوجد مساحته

الحــــل

نفرض أن ضلعى القائمة س ، ص ∴ س + ص = ٧ ∴ ص = ٧ – س (١)

من نظرية فيثاغورث ∴ $س^2 + ص^2 = ٢٥$ (٢)

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية ∴ $س^2 + (٧ – س)^2 = ٢٥$

∴ $س^2 + ٤٩ – ١٤ س + س^2 – ٢٥ = ٠$

$٢س^2 – ١٤ س + ٢٤ = ٠$ ÷ ٢

∴ $س^2 – ٧ س – ١٢ = (س – ٣)(س - ٤) = ٠$

∴ س = ٣ أ، س = ٤ منها ص = ٤ أ، ص = ٣

∴ مساحته = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٣ = ٦ $سم^2$

****

تمـــارين

١ – أختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) أحد حلول المعادلة : س^{٢} + ص^{٢} = ٢ فى ح هو ....

[(–٢ ، ٢) ، (–١ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠)]

٢) أحد حلول المعادلتين : س ص = ٢ ، س – ص = ١ هو ....

[(١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ($\frac{١}{}$ ، ١)]

٣) إذا كانت س = ٢ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٥ فإن : ص ∋ ....

[{ ١ } ، { ٢ ، ٥ } ، { –١ ، ١ } ، { –١ }]

٤) مجموعة حل المعادلتين : ص = س ، س ص = ١ هى ....

[{ (١ ، ١) } ، { (٠ ، ٠) } ، { (١ ، ١) ، (–١ ، –١) } ، { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) }]

٥) مجموعة حل المعادلتين : س – ص = ٠ ، ٣ س^{٢} – ص^{٢} = ١٨ هى ....

[{ (٣ ، ٣) } ، { (–٣ ، –٣) } ، { (٣ ، ٣) ، (–٣ ، –٣) } ، ∅]

٦) إذا كان : ص = ١ – س ، (س + ص)^{٢} + ص = ٥ فإن : ص = ...

[٥ ، ٣ ، –٤ ، ٤]

٧) مجموعة حل المعادلتين : س ص = ٦ ، ص = س + ١ هى ....

[{ (٢ ، ٣) } ، { (–٣ ، ٢) } ، { (–٢ ، ٣) } ، { (٢ ، ٣) ، (–٣ ، –٢) }]

٢ – أوجد مجموعة الحل لكل زوج من أزواج المعادلات الآتية :

(١) س = ص ، س^{٢} + ص^{٢} = ٥

(٢) ص = ٣ س ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٠

(٣) س – ص = ٢ ، س^{٢} – ٥ ص = ٤

(٤) س + ص = ٣ ، س ص = ٢

(٥) س – ص = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٧

(٦) س + ص = ٤ ، س^{٢} – س ص + ص^{٢} = ٧

(٧) س – ص = ٢ ، (س – ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٣٢

(٨) ص = $\frac{٤}{}$ س , س^{٢} – ص^{٢} = ٥

(٩) س + ص = ٦ ، $\frac{١}{س}$ + $\frac{ه}{ص}$ ٢

(١٠) ص = ٢ س + ٣ ، س (ص – ٣ س) = ٢

٣ – أجب عما يلى :

١) أوجد عددين نسبيين حاصل ضربهما = ٢ ، مجموع احدهما وضعف الآخر = ٤

٢) عددان حقيقيان الفرق بين مربعيهما = ٧ ، مجموعهما = ٧ فما هما العددان ؟

٣) عددان موجبان أحدهما يزيد عن ثلاثة أمثال الأخر بمقدار ١ , ومجموع مربعيهما ١٧ فم هما العددان ؟

٤) قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها = ١٠٨م٢ فإذا كان طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٣ أمتار فأوجد بعدى قطعة الأرض

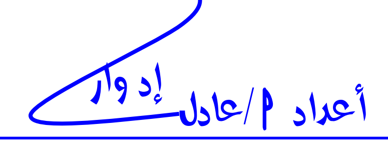
٥) مستطيل محيطه ١٦ سم ، مساحته ١٥ سم٢ اوجد بعديه

٦) عددان حقيقيان أكبرهما يساوى ضعف الأصغر مضافاً إليه ١ ، أربعة أمثال الأصغر مضافاً إليه مربع الأكبر يساوى ١٣ فما هما العددان ؟

٧) عدد مكون من رقمين مجموع مربعيهما مطروحاً منه حاصل ضربهما يساوى ١٣ ، فإذا كان العدد الأصلى يزيد عن العدد الناتج عن عكس وضع الرقمين بمقدار ٢٧ أوجد العدد الأصلى

٨) ٩ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى فيه : ب حـ – ٢ ٩ ب = ٢ ، ٩ حـ – ب حـ = ١
أوجد أطوال أضلاع هذا المثلث

****



الوحدة الثانية
الكسور الجبرية

(١) مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

(٢) الدالة الكسرية الجبرية

(٣) تساوى كسرين جبريين

(٤) ضرب الكسور الجبرية

(٥) جمع وطرح كسرين جبريين

(٦) قسمة الكسور الجبرية

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

تمهيد :

إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = س^٢ – ٩

فإن : د (٣) = (٣)^٢ – ٩ = ٠ ، د (–٣) = (–٣)^٢ – ٩ = ٠

لذا يسمى كل من : ٣ ، – ٣ أصفار الدالة د

بصفة عامة :

إذا كانت : د : ح ← ح دالة كثيرة حدود فى المتغير س فإن : قيم س التى تجعل " د (س) = ٠ "

تسمى مجموعة أصفار الدالة د " ويرمز لها بالرمز ص (د) "

أى أن : ص (د) هى مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

⇦ لإيجاد أصفار الدالة : نضع د(س) = ٠ ، نحل المعادلة الناتجة ، منها نوجد مجموعة قيم س فتكون هى مجموعة أصفار الدالة

لاحظ : الفرق بين د , د (س) , ص (د)

** د : رمز للدالة ** د (س) : قاعدة الدالة

** ص (د) : مجموعة أصفار الدالة د

فمثلاً :

إذا كانت : د (س) = س – ٣

نضع : س – ٣ = ٠ ∴ س = ٣ ∴ ص (د) = { ٣ }

إذا كانت : د (س) = س^٣ – ٩ س

نضع : س^٣ – ٩ س = ٠ ∴ س (س^٢ – ٩) = ٠

∴ س (س – ٣)(س + ٣) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ٣ ، س = – ٣

∴ ص (د) = { ٠ ، ٣ ، – ٣ }

إذا كانت : د (س) = ٤س^٢ – ٦ س + ٩

نضع : ٤س^٢ – ٦ س + ٩ = ٠

∴ ٤ س^{٢} – ٦ س + ٩ = ٠ لا يمكن تحليل هذا المقدار لذا نستخدم القانون العام

س = $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ = $\frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ٤ \times ٩}}{٢ \times ٤}$ = $\frac{٦ \pm \sqrt{-١٠٨}}{٨}$ ∌ ح

∴ لا توجد حلول حقيقية للدالة ∴ ص (د) = ∅

إذا كانت : د (س) = ٨

لا يوجد أى عدد حقيقى يجعل د (س) = ٠ ∴ ص (د) = ∅

****

مثـ١ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س – ١

الحـــــــل

د(س) = ٠ ∴ س – ١ = ٠

∴ س = ١ ∴ ص (د) = { ١ }

****

مثـ٢ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س^{٢} – ٥ س +٦

الحـــــــل

د(س) = ٠ ∴ س^{٢} – ٥ س + ٦ = (س – ٢)(س – ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣ ∴ ص (د) = { ٢ ، ٣ }

****

مثـ٣ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س^{٢} – ٤

الحـــــــل

د(س) = ٠ ∴ س^{٢} – ٤ = (س – ٢)(س + ٢) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = -٢ ∴ ص (د) = { ٢ ، -٢ }

****

مثـ٤ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س^{٣} – س

الحـــــــل

د(س) = ٠ ∴ س^{٣} – س = س (س^{٢} – ١) = ٠

∴ س (س – ١)(س + ١) = ٠

∴ س=٠ أ، س=١ أ، س= -١ ∴ ص (د) = { ٠ ، ١ ، -١ }

****

تمارين

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

[١] مجموعة أصفار الدالة د (س) = س + ٣ هى .....
[{ ٣ } ، ح ، { −٣ } ، { ٣ ، −٣ }]

[٢] مجموعة أصفار الدالة د (س) = ٥ − س هى .....
[{ ٥ } ، ح − { ٥ } ، ح ، { ٠ ، ٥ }]

[٣] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $س^{٢}$ − ١ هى .....
[{ ٠ ، ١ } ، ∅ ، { −١ ، ١ } ، { ٠ ، −١ }]

[٤] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $س^{٢}$ − ٣ س هى .....
[{ ٠ ، ٣ } ، { ٠ } ، { ٣ } ، { ٠ ، −٣ }]

[٥] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $س^{٢}$ + ٩ هى .....
[{ ٠ ، ٩ } ، { ٠ } ، ∅ ، { ٠ ، −٣ }]

[٦] مجموعة أصفار الدالة د (س) = (س − ١) (س + ٢) هى .....
[{ −١ ، ٢ } ، { ١ } ، { ٢ } ، { ١ ، −٢ }]

[٧] مجموعة أصفار الدالة د (س) = س ($س^{٢}$ − ٤ س + ٣) هى .....
[{ ٠ ، ٣ } ، { ٠ ، ١ ، ٣ } ، { ١ ، ٣ } ، { ٠ ، −٣ }]

(٢) اوجد مجموعة أصفار كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية فى ح :

[١] د (س) = ٣ س − ٦   [٢] د (س) = ٢

[٣] د (س) = $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ [٤] د (س) = $س^{٢}$ − ٥ س + ٦

[٥] د (س) = $س^{٢}$ − ٣ س − ١٠   [٦] د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ٥ س − ٢

[٧] د (س) = س ($س^{٢}$ − ٩) − ٣ ($س^{٢}$ − ٩)

(٣) إذا كان : س = ١ أحد أصفار الدالة د حيث : د (س) = $س^{٢}$ − ٢ س + ل
فأوجد قيمة : ل

(٤) إذا كان : { ١ ، ٣ } هى مجموعة أصفار الدالة د (س) = $س^{٢}$ − م س + ل
فأوجد قيمة كل من : م ، ل

أصفار الدالة الكسرية

هى قيم س التى عندها الدالة تساوى صفر ونحصل عليها بوضع البسط = صفر ما عدا القيم التى تجعل المقام = صفر ونحصل عليها بعد وضع الدالة الكسرية فى أبسط صورة

****

مثــ١ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س - ٢}{س - ٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ س – ٢ = ٠

∴ س = ٢ ∴ ص (د) = { ٢ }

****

مثــ٢ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٤}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^٢$ – ٩ = (س – ٣)(س + ٣) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = -٣ ∴ ص (د) = { ٣ ، -٣ }

****

مثــ٣ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س + ٢}{س + ٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ س + ٢ = ٠

∴ س = – ٢ ∴ ص (د) = { - ٢ }

****

مثــ٤ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^٢ + ٤}{س}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^٢$ + ٤ = ٠ ∴ $س^٢$ = -٤ مرفوض

∴ لا يوجد أصفار للدالة ∴ ص (د) = ∅

مثــ٥ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س}{س+٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ س = ٠ ∴ ص (د) = { ٠ }

****

مثــ٦ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^٢ - ٤س + ٣}{س^٢ - ٥ س +٦}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^٢ - ٤ س + ٣ = (س - ١)(س - ٣) = ٠$

∴ س = ١ أ، س = ٣ ∌ المجال ∴ ص (د) = { ١ }

****

مثــ٧ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{(س^٢ -١)(س^٣ +٨)}{س^٢ - ٤س +٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $(س^٢ - ١)(س^٣ + ٨) = ٠$

∴ $س^٢ = ١$ ، $س^٣ = -٨$

∴ س = ± ١ ، س = -٢ ، س = ١ ∌ المجال ∴ ص (د) = { -٢ ، -١ }

****

مثــ٨ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^٢ - ٥}{س^٢ - ١}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^٢ - ٥ = ٠$ ∴ $س^٢ = ٥$

∴ س = ± $\sqrt{٥}$ ∴ ص (د) = { $\sqrt{٥}$ ، -$\sqrt{٥}$ }

****

مثــ٩ــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^٣ - ٩ س}{س^٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^٣ - ٩ س = س (س^٢ - ٩) = ٠$

∴ س (س - ٣)(س +٣) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣ ، س = -٣

∴ ص (د) = { ٠، ٣ ، -٣ } - { ٠ } = { -٣ ، ٣ }

تمارين على أصفار الدالة

عين أصفار كلا من الدوال الاتية

(١) د(س) = س + ٢ { −٢ }

(٢) د(س) = س^{٢} − ١ { −١ ، ١ }

(٣) د(س) = ٤ − س^{٢} { −٢ ، ٢ }

(٤) د(س) = س^{٢} + س { ٠ ، −١ }

(٥) د(س) = س^{٢} − ٥ س { ٠ ، ٥ }

(٦) (س) = س^{٢} − ٥س +٤ { ١ ، ٤ }

(٧) د(س) = س^{٣} − ٧س^{٢} +١٢س { ٠ ، ٣ ، ٤ }

(٨) د(س) = س^{٣} − ٢٥ س { ٠ ، ٥ ، −٥ }

(٩) د(س) = س^{٢} − ٢ س − ١٥ { −٣ ، ٥ }

(١٠) د(س) = س^{٣} − س { ٠ ، ١ ، −١ }

(١١) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$ { −٤ ، ٤ }

(١٢) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$ { ٢ }

(١٣) د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢٠\text{س}}{\text{س}^{٣} - ١٢٥}$ { ٠ ، −٤ }

(١٤) د(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٢٥}$ { ١ }

(١٥) د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$ { ٠ ، ٢ ، −٢ }

(١٦) د(س) = $\frac{١٦ - \text{س}^{٢}}{٢\text{س} - ٣}$ { −٤ ، ٤ }

(١٧) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠}{\text{س} - ١}$ { −٢ ، ٥ }

(١٨) د(س) = $\frac{١ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - ٨}$ { −١ ، ١ }

الدالة الكسرية الجبرية

تعريف :

إذا كان ق ، د كثيرتى حدود ، و كان ص (د) هى مجموعة أصفار د فإن الدالة

ن حيث : ن : ع − ص (د) ← ع ، ن (س) = $\frac{ق (س)}{د (س)}$

تسمى دالة كسرية جبرية حقيقية و إختصاراً تسمى " كسراً جبرياً "

لاحظ أن : مجال الدالة الكسرية الجبرية = ع − مجموعة أصفار المقام

****

مثـ١ـال : عين مجال كل من الدوال التالية :

[١] $ن_1$ (س) = $\frac{س}{س - ٤}$ [٢] $ن_2$ (س) = $\frac{س - ١}{س^2 - ١}$

[٣] $ن_3$ (س) = $\frac{س^2 - ٩}{س^2 - ٥ س + ٦}$

الحـــــل

[١] نضع : س − ٤ = ٠ ومنها : س = ٤

∴ مجال $ن_1$ (س) = ح − { ٤ }

[٢] نضع : $س^2$ − ١ = ٠ ∴ (س − ١)(س + ١) = ٠

∴ س = ١ ، س = − ١

∴ مجال $ن_2$ (س) = ح − { ١ ، − ١ }

[٣] نضع : $س^2$ − ٥ س + ٦ = ٠ ∴ (س − ٢)(س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ ، س = ٣

∴ مجال $ن_3$ (س) = ح − { ٢ ، ٣ }

****

مثـ٢ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(١) ن (س) = $\frac{س - ٢}{س - ٣}$ (٢) ن (س) = $\frac{س}{س^2 - ٤}$

الحـــــل

(١) نوجد أصفار المقام ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣ ∴ مجال الدالة = ح − { ٣ }

(٢) نوجد أصفار المقام ∴ $س^٢ - ٤ = (س - ٢)(س + ٢) = ٠$ ٠

∴ س = ٢ ، س = -٢ ∴ مجال الدالة = ح - { ٢ ، -٢ }

****

مثـ٣ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(!) ن(س) = $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ (!!) ن(س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + ٤}$

الحـــــل

(!) نوجد أصفار المقام ∴ س + ٣ = ٠

∴ س = - ٣ ∴ مجال الدالة = ح - { - ٣ }

(!!) نوجد أصفار المقام ∴ $س^٢ + ٤ = ٠$ ∴ $س^٢ = -٤$ مرفوض

∴ لا يوجد أصفار للمقام ∴ مجال الدالة = ح

****

مثـ٤ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(ﺃ) ن(س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ (ب) ن(س) = $\frac{س^٢ - ٣ س + ٥}{(س - ١)^٢}$

الحـــــل

(ﺃ) نوجد أصفار المقام ∴ $س^٢ - ٥ س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣) = ٠$

∴ س = ٢ ، س = ٣ ∴ مجال الدالة = ح - { ٢ ، ٣ }

(ب) نوجد أصفار المقام $(س - ١)^٢ = ٠$ س - ١ = ٠

∴ س = ١ ∴ مجال الدالة = ح - { ١ }

****

مثـ٥ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(١) ن(س) = $\frac{س^٢ - ٥س + ٤}{(س^٢ - ٩)(س^٣ + ٨)}$ (٢) ن(س) = $\frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٢ - س}$

الحـــــل

نوجد أصفار المقام ∴ $(س^٢ - ٩)(س^٣ + ٨) = ٠$

∴ $س^٢ = ٩$ ، $س^٣ = -٨$

∴ س = ± ٣ ، س = -٢ ∴ مجال الدالة = ح - { -٣ ، -٢ ، ٣ }

نوجد أصفار المقام ∴ $س^٢ - س = س (س - ١) = ٠$

∴ س = ٠ ، س = ١ ∴ مجال الدالة = ح - { ٠ ، ١ }

****

تمـــارين على مجال الدالة الكسرية

س عين مجال كلا من الدوال الاتية

(١) د(س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س} + ٢}$ ح - { -٢ }

(٢) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$ ح - { -٣ ، ٣ }

(٣) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}$ ح - { ٢ }

(٤) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢}$ ح - { -٣ ، ٤ }

(٥) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢٠}{\text{س}^٣ - \text{س}}$ ح - { ٠ ، ١ ، -١ }

(٦) (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠}{\text{س}^٣ + ٥\text{س}^٢ + ٦\text{س}}$ ح - { ٠ ، -٢ ، -٣ }

(٧) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٢٤}$ ح – { ٦ ، -٤ }

(١١) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س}^٢ - ٢٥}$ ح - { -٥ ، ٥ }

(١٢) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - ١}$ ح - { ١ ، -١ }

(١٣) د(س) = $\frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ - ٢٠\text{س}}{\text{س}^٣ - ١٢٥}$ { ٠ ، -٤ ، ٥ }

(١٤) د(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + ٢٥}$ ح

(١٥) د(س) = $\frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}}{\text{س}^٢ - ١٠٠}$ ح - { ١٠ ، -١٠ }

(١٦) د(س) = $\frac{١٦ - \text{س}^٢}{٢\text{س} - ٣}$ ح - { $\frac{٣}{٢}$ }

(١٧) د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠}{\text{س} - ١}$ ح - { ١ }

(١٨) د(س) = $\frac{١ - \text{س}^٢}{\text{س}^٣ - \text{س}}$ ح - { -١ ، ٠ ، ١ }

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر هو مجموعة الأعداد الحقيقية التى تكون فيها هذه الكسور معرفة معاً (فى آن واحد)

أى أن :

إذا كان : $ن_1$ ، $ن_2$ كسرين جبريين و كان :

مجال $ن_1$ = ع – $س_1$ (حيث $س_1$ مجوعة أصفار مقام $ن_1$)

، مجال $ن_2$ = ع – $س_2$ (حيث $س_2$ مجوعة أصفار مقام $ن_1$)

فإن : المجال المشترك للكسرين $ن_1$ ، $ن_2$ = ع – ($س_1$ ∪ $س_2$)

= ع – مجموعة أصفار مقامى الكسرين = ع – مجموعة أصفار مقامى الكسرين

- و يكون المجال المشترك لعدد من الكسور الجبرية =

= ع – مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور

****

مثـــ١ـــال : أوجد المجال المشترك للكسرين التاليين :

$ن_1$ (س) = $\frac{س^2 + ٥}{س^3 - س^2}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{س + ٧}{س^4 - ١}$

الحـــــــل

نوجد أصفار مقام كلاً من الكسرين

نضع : $س^3 - س^2 = ٠$ ∴ $س^2$ (س – ١) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ١ ∴ مجال $ن_1$ (س) = { ٠ ، ١ }

نضع : $س^4 - 1 = ٠$ ∴ (س – ١) (س + ١) ($س^2$ + ١) = ٠

∴ س = ١ أو س = – ١ ∴ مجال $ن_2$ (س) = { ١ ، – ١ }

∴ المجال المشترك للكسرين = ع – { ١ ، ٠ ، – ١ }

****

مثـــ٢ـــال : أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

$ن_1$ (س) = $\frac{س - ٣}{س}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{س - ١}{س - ٢}$

الحـــــل

نوجد أصفارمقام الكسر الاول س = ٠

نوجد أصفار مقام الكسر الثانى س – ٢ = ٠ س = ٢

المجال المشترك = ح – { ٠ ، ٢ }

****

مثــ٣ــال : أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

$ن_1(س) = \frac{س}{٥}$ ، $ن_2(س) = \frac{٣}{س + ٢}$ ، $ن_3(س) = \frac{س^2}{س^3 - ٨}$

الحـــل

نوجد أصفار مقام الكسر الأول ٥ = ٠ مرفوض (ليس له أصفار)

نوجد أصفار مقام الكسر الثانى س +٢ = ٠ ∴ س = -٢

نوجد أصفار مقام الكسر الثالث $س^3 - ٨ = ٠$ $س^3 = ٨$ ∴ س = ٢

∴ المجال المشترك = ح – { -٢ ، ٢ }

****

مثــ٣ــال : أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الإتية

$ن_1(س) = \frac{س - ١}{س + ٢}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - ٢س + ١}{س^2 - ٩}$

الحـــل

نوجد أصفار مقام الكسر الأول س + ٢ = ٠ ∴ س = -٢

نوجد أصفار مقام الكسر الثانى $س^2 - ٩ = (س - ٣)(س + ٣) = ٠$

∴ س = ٣ ، س = -٣ ∴ المجال المشترك = ح – { -٢ ، ٣ ، -٣ }

****

مثــ٣ــال : أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

$ن_1(س) = \frac{٥}{س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س - ٣}{س^2 - ١}$ ، $ن_3(س) = \frac{س}{س^2 - ٧س + ١٢}$

الحـــل

نوجد أصفار مقام الكسر الأول ∴ س = ٠

نوجد أصفار مقام الكسر الثانى $س^2 - ١ = ٠$ $س^2 = ١$ ∴ س = $\pm$١

نوجد أصفار مقام الكسر الثالث $س^2 - ٧س + ١٢ = (س - ٣)(س - ٤) = ٠$

∴ س = ٣ ، س = ٤ ∴ المجال المشترك = ح – { ٠ ، ١ ، -١ ، ٣ ، ٤ }

****

تمارين

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

[١] مجال الدالة د (س) = $\frac{س - ٥}{٣}$ هو . . . .

[ح − { ٣ } ، ح − { ٥ } ، ح ، ح − { ٣ ، ٥ }]

[٢] مجال الدالة د (س) = $\frac{٣}{س (س + ١)}$ هو . . . .

[ح − { ١ } ، ح − { −١ } ، ح ، ح − { −١ ، ٣ }]

[٣] مجال الدالة د (س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} + ٤}$ هو . . . .

[ح − { ٢ } ، ح − { −٤ } ، ح ، ح − { −٢ ، ٢ }]

[٤] مجال الدالة د (س) = $س^{٢} + ٩$ هو . . . .

[ح − { ٣ } ، ح − { −٣ } ، ح ، ح − { −٣ ، ٣ }]

[٥] المجال المشترك للدالتين $د_{١}$ (س) = $\frac{٣}{٥ س}$ ، $د_{٢}$ (س) = $\frac{س - ١}{٤}$ هو . . . .

[ح − { ٤ } ، ح − { ٠ } ، ح ، ح − { ٤ ، ٠ }]

[٦] المجال المشترك للدالتين $د_{١}$ (س) = $\frac{٢}{س - ٣}$ ، $د_{٢}$ (س) = $\frac{١}{س + ٥}$ هو . . . .

[ح − { ٣ } ، ح − { −٥ } ، ح ، ح − { ٣ ، −٥ }]

(٢) أوجد المجال المشترك لمجموعات الكسور الجبرية التالية :

[١] $د_{١}$ (س) = $\frac{٥}{س^{٢} - ٤}$ ، $د_{٢}$ (س) = $\frac{١}{٢ س + ٤}$

[٢] $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س + ٣}{س^٢ - س - ١٢}$

[٣] $ن_١(س) = \frac{٥س^٢ - ٧}{س^٢ + ٢س - ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٤س + ٤}$

، $ن_٣(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٢س + ٤}$

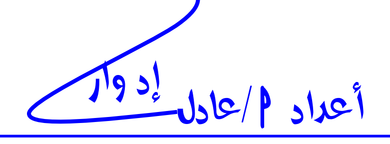
[٤] $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٣}{س^٢ + س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - س - ٦}$

، $ن_٣(س) = \frac{٣س + ٢}{س^٢ + ٤س + ٣}$

(٣) إذا كان مجال الدالة $ن(س) = \frac{س^٤ - ٨}{س^٢ - ٤س +}$ هو ح − {٢}

أوجد قيمة ك

****



إختزال الكسر الجبرى

إختزال الكسر الجبرى :

وضع الكسر الجبرى فى أبسط صورة يسمى بإختزال الكسر الجبرى

خطوات إختزال الكسر الجبرى :

[١] نحلل كلاً من بسط و مقام الكسر الجبرى تحليلاً تاماً

[٢] نعين مجال الكسر الجبرى

[٣] نحذف العوامل المشتركة فى كل من البسط و المقام

تعريف : يقال إن الكسر الجبرى فى أبسط صورة له إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسطه و مقامه

****

مثـــال ١ : إذا كانت $ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١}$

أختصر ن (س) إلى أبسط صورة مبيناً مجال ن (س)

الحـــــــل

$ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١} = \frac{س(س - ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

مجال ن (س) = ح − { ١ ، −١ }

∴ $ن(س) = \frac{س}{(س + ١)}$ " بحذف (س − ١) من البسط و المقام

****

مثـــال ٢ : اختزل كلا من الكسور الجبرية الأتية مبيناً مجال كلا منها

$ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

الحـــل

$ن_١(س) = \frac{(س - ٣)(س - ٢)}{(س - ٣)(س + ٣)}$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ } $ن_١(س) = \frac{س - ٢}{س + ٣}$

$ن_٢(س) = \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

المجال = ح − { ٢ ، −٢ } $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س + ٢}$

****

مثـ٣ـال : اختزل كلا من الكسور الجبرية الأتية مبيناً مجال كلاٍ منها

$ن_1(س) = \frac{س^2 - ٤س + ٣}{س^2 - س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 + س - ٦}{س^2 - ٢س - ١٥}$

الحـــل

$ن_1(س) = \frac{(س - ٣)(س - ١)}{س(س - ١)}$

المجال = ح − { ٠ ، ١ }

$ن_1(س) = \frac{س - ٣}{س}$

$ن_2(س) = \frac{(س+٣)(س - ٢)}{(س - ٥)(س+٣)}$

المجال = ح − { ٥ ، -٣ }

$ن_2(س) = \frac{س - ٢}{س - ٥}$

****

تساوى كسرين جبريين

يقال أن الدالتين $ن_1$ ، $ن_2$ متساويتان (أى : $ن_1 = ن_2$) إذا تحقق الشرطان التاليان معاً : [١] مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$

[٢] $ن_1(س) = ن_2(س)$ لكل س ∋ المجال المشترك

****

مثـ١ـال : إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س^2 - س}{س^3 - ٢س^2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - ٣س + ٢}{س^3 - ٤س^2 + ٤س}$

اثبت أن : $ن_1(س) = ن_2(س)$ لكل قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك و أوجد هذا المجال

الحـــل

∵ $ن_1(س) = \frac{س^2 - س}{س^3 - ٢س^2} = \frac{س(س - ١)}{س^2(س - ٢)} = \frac{س - ١}{س(س - ٢)}$

، مجال $ن_1$ = = ح − { ٠ ، ٢ }

، $ن_2(س) = \frac{س^2 - ٣س + ٢}{س^3 - ٤س^2 + ٤س} = \frac{(س - ٢)(س - ١)}{س(س - ٢)(س - ١)} = \frac{س - ١}{س(س - ٢)}$

، مجال $د_٢$ = = ح – { ٠ ، ١ ، ٢ }

∴ $د_١$ (س) ≠ $د_٢$ (س) لأن : مجال $د_١$ (س) ≠ مجال $د_٢$ (س)

و يكون $د_١$ (س) = $د_٢$ (س) " أى يأخذان نفس القيم " إذا كانت س

التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين $د_١$ ، $د_٢$ و هو ح – { ٠ ، ١ ، ٢ }

****

مثـــال : إذا كان $د_١(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ - ٤}$ ، $د_٢(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣س + ٢}$

هل $د_١$ = $د_٢$ ثم أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان

الحـــل

$د_١(س) = \frac{(س + ٢)(س + ١)}{(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{س + ١}{س - ٢}$ المجال = ح – { ٢ ، -٢ }

$د_٢(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ٢)(س - ١)} = \frac{س + ١}{س - ٢}$ المجال = ح – { ٢ ، ١ }

$د_١$ ≠ $د_٢$ (بسبب أختلافهما فى المجال)

المجال الذى تتساوى فيه الدالتان = ح – { ٢ ، -٢ ، ١ }

****

مثـــال : إذا كان $د_١(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س}$ ، $د_٢(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

إثبت أن $د_١$ = $د_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين وأوجد هذا المجال

الحـــل

$د_١(س) = \frac{س(س^٢ - س - ٦)}{س(س^٢ - ٩)} = \frac{س(س - ٣)(س + ٢)}{س(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

مجال $د_١$ = ح – { ٠ ، ٣ ، -٣ }

$د_٢(س) = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٣)(س - ٢)} = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

المجال = ح – { ٢ ، ٣ }

$ن_1 \neq ن_2$ (بسبب أختلافهما فى المجال)

ولكن $ن_1 = ن_2$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك بين الدالتين

المجال المشترك = ح – { ٠ ، ٢ ، -٣ ، ٣ }

****

تمارين

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

[١] الدالة ن (س) = $\frac{٤ س^٢ - ٢ س}{٢ س}$ فى أبسط صورة هى ٠٠٠٠

[٢ س ، ٢ س – ١ ، ٤ س^٢ – ١ ، صفر]

[٢] للدالتين $ن_1$ (س) = $\frac{س}{س^٣ + س}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ يكون :

$ن_1 = ن_2$ لكل س ∈ ٠٠٠٠

[ح – { ١ } ، ح – { ٠ } ، ح ، ح – { ١ ، – ١ ، ٠ }]

[٣] إذا كان $ن_1$ (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ، $ن_2$ (س) = س + ٢ فإن :

$ن_1 = ن_2$ فى المجال ٠٠٠٠٠

[ح – { ٢ } ، ح – { – ٢ } ، ح ، ح – { – ١ }]

[٤] إذا كان س $\neq$ ٣ فإن : أبسط صورة للكسر الجبرى ن (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ هى ٠٠٠٠

[٣ ، ١ ، صفر ، – ١]

[٥] إذا كان ن (س) = $\frac{س}{٣ س - ٢}$ فإن ن (صفر) = ٠٠٠٠

[٢ ، ٣ ، ١ ، صفر]

[٦] إذا كان ن $(س) = \frac{س^{٢} + س}{س - ١}$ فإن ن (٢) = ...

[٢ ، ٦ ، ٣ ، صفر]

[٧] إذا كان ن$_{١}$ (س) $= \frac{١ + ك}{س - ١}$ ، ن$_{٢}$ (س) $= \frac{٤}{س - ١}$ وكان :

ن$_{١}$ (س) = ن$_{٢}$ (س) فإن ك = ... [٢ ، ٣ ، ١ ، صفر]

[٨] إذا كان أبسط صورة للكسر الجبرى ن (س) $= \frac{س^{٢} - ك}{س^{٢} + ٤ س + ٤}$ هى :

ن (س) $= \frac{س - ٢}{س + ٢}$ فإن ك = ... [٢ ، ٤ ، ٨ ، صفر]

(٢) أختصر الكسور التالية لأبسط صورة :

[١] ن (س) $= \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$　　[٢] ن (س) $= \frac{س + ٣}{س^{٢} - س - ١٢}$

[٣] ن (س) $= \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٤ س + ٤}$　　[٤] ن (س) $= \frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢} + س - ٢}$

[٥] ن (س) $= \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - س - ٦}$　　[٦] ن (س) $= \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$

[٧] ن (س) $= \frac{(س - ٢)^{٢} - ١}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$　　[٨] ن (س) $= \frac{٢ س^{٢} + ٧ س + ٦}{٤ س^{٢} + ٤ س - ٣}$

(٣) فى كل مما يأتى هل : ن$_{١}$ (س) = ن$_{٢}$ (س) ولماذا ؟؟

١) ن$_{١}$ (س) $= \frac{س}{س^{٢} - ١}$ ، ن$_{٢}$ (س) $= \frac{٥ س}{٥ س^{٢} - ٥}$

٢) ن$_{١}$ (س) $= \frac{٢ س^{٢} - ١٠ س - ٢٨}{٢ س^{٢} + ٢ س - ٤}$ ، ن$_{٢}$ (س) $= \frac{٢ س^{٢} - ٥ س - ١٤}{س^{٢} + س - ٢}$

٣) $ن_1(س) = \frac{س^2 + ٤س + ٣}{س^2 + س - ٦}$ ، $ن_2(س) = \frac{٢س^2 - ٥س - ٧}{٢س^2 - ٩س + ١٤}$

٤) $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + س - ٦}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 - س^2 - ٦س}{س^3 - ٩س}$

(٤) إذا كان $ن_1(س) = \frac{س - ١}{س^2 - ٤س + ٣}$ ، $ن_2(س) = \frac{س - ٢}{س^2 - ٥س + ٦}$

أثبت أن $ن_1(س) = ن_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين و أوجد هذا المجال

(٥) إذا كان $ن_1(س) = \frac{س^2 + ٤س + ٣}{س^2 + س - ٦}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - ٦س - ٧}{س^2 - ٩س + ١٤}$

أثبت أن $ن_1(س) = ن_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين و أوجد هذا المجال

(٦) إذا كان $ن_1(س) = \frac{س^2 + ٣س + ٢}{س^2 - ٤}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - ١}{س^2 - ٣س + ٢}$

أثبت أن $ن_1(س) = ن_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين و أوجد هذا المجال

(٧) إذا كان: $ن_1(س) = \frac{س + ٣}{س^2 - س - ٢}$ ، $ن_2(س) = \frac{س - ١}{٢س^2 - أس + ك}$

، و كان مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$ فأوجد قيمة كل من : أ ، ك

****

العمليات على الكسور الجبرية

أولاً : جمع و طرح الكسور الجبرية

قاعدة جمع و طرح كسرين جبريين هى نفس قاعدة جمع و طرح عددين نسبيين وبالتالى يمكن إجراء عملية جمع أو طرح كسرين جبريين متحدى المقام أو مختلفى المقام كما يلى

إذا كان س ∋ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_1(س)$ ، $ن_2(س)$ حيث :

(١) $ن_1(س) = \dfrac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \dfrac{د_3(س)}{د_2(س)}$

" كسرين جبريين متحدى المقام "

فإن : $ن_1(س) + ن_2(س) = \dfrac{د_1(س)}{د_2(س)} + \dfrac{د_3(س)}{د_2(س)} = \dfrac{د_1(س) + د_3(س)}{د_2(س)}$

، $ن_1(س) - ن_2(س) = \dfrac{د_1(س)}{د_2(س)} - \dfrac{د_3(س)}{د_2(س)} = \dfrac{د_1(س) - د_3(س)}{د_2(س)}$

(٢) $ن_1(س) = \dfrac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \dfrac{د_3(س)}{د_4(س)}$

" كسرين جبريين مختلفى المقام "

فإن : $ن_1(س) + ن_2(س) = \dfrac{د_1(س)}{د_2(س)} + \dfrac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$= \dfrac{د_1(س) \times د_4(س) + د_2(س) \times د_3(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$

، $ن_1(س) - ن_2(س) = \dfrac{د_1(س)}{د_2(س)} \quad \dfrac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$= \dfrac{د_1(س) \times د_4(س) - د_2(س) \times د_3(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$

ملاحظات :

* مجال الكسر الجبرى : $ن_1$ (س) + $ن_2$ (س) هو المجال المشترك للكسرين :
$ن_1$ (س) ، $ن_2$ (س)

* لكل كسر جبرى ن(س) يوجد معكوس جمعى هو : – ن (س)

فمثلاً : المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{س - ٢}{س - ٣}$ هو الكسر الجبرى : $-\frac{س - ٢}{س - ٣}$

، وهو أيضاً : $\frac{٢ - س}{س - ٣}$ أو $\frac{س - ٢}{٣ - س}$

لجمع (طرح) كسرين جبريين " أو أكثر " نتبع الآتى :

١ – نرتب حدود بسط ومقام كل كسر حسب الأسس تنازلياً أو تصاعدياً " تنازلياً أفضل "

٢ – نحلل بسط ومقام كل كسر جبرى إن أمكن " مجموع وفرق بين مكعبين أولاً "

٣ – نوجد المجال المشترك

٤ – نبسط كل كسر على حدة " نختصر الكسر "

٥ – نوحد المقامات للكسور

٦ – نجرى عملية الجمع (الطرح)

٧ – نبسط الناتج

****

مثــ١ــال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجالها

$$ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٤ س + ٣} + \frac{س - ٢}{س^٢ - ٥ س + ٦}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س - ١)} + \frac{س - ٢}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{١}{س - ١} + \frac{١}{س - ٣}$$

$$= \frac{س - ٣ + س - ١}{(س - ١)(س - ٣)} = \frac{٢س - ٤}{(س - ١)(س - ٣)}$$ المجال = ح – { ٣ ، ١ ، ٢ }

مثـ٢ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة وعين مجال ن حيث

$$ن(س) = \frac{٢}{س^٢ - ١} + \frac{٤}{س^٢ - ٣س + ٢}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{٢}{(س - ١)(س + ١)} + \frac{٤}{(س - ٢)(س - ١)} = \frac{٢(س - ٢) + ٤(س + ١)}{(س-١)(س+١)(س-٢)}$$

$$= \frac{٢س - ٤ + ٤س + ٤}{(س-١)(س+١)(س-٢)} = \frac{٦س}{(س-١)(س+١)(س-٢)}$$ المجال = ح − { ١ ، -١ ، ٢ }

****

مثـ٣ـال : إذا كان : $ن_١(س) = \frac{٣س - ٦}{س^٢ - س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ + ٤س + ٣}$

أوجد : ن(س) = ن١(س) + ن٢(س)

الحـــل

$$ن(س) = \frac{٣(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)} + \frac{(س + ٣)(س - ٢)}{(س + ٣)(س + ١)}$$

حيث مجال ن(س) = ح − { −١ ، ٢ ، −٣ }

$$\therefore ن(س) = \frac{٣}{س + ١} + \frac{س - ٢}{س + ١} = \frac{٣ + س - ٢}{س + ١} = \frac{س + ١}{س + ١} = ١$$

****

مثـ٤ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ١} + \frac{س - ٢}{س + ٤}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{(س+٣)(س+٤) + (س-١)(س-٢)}{(س - ١)(س + ٤)} = \frac{س^٢ + ٧س + ١٢ + س^٢ - ٣س + ٢}{(س - ١)(س + ٤)}$$

$$= \frac{٢س^٢ + ٤س + ١٤}{(س - ١)(س + ٤)}$$ المجال = ح − { ١ ، -٤ }

مثـ٥ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س}{س^٢ - ١} + \frac{٢}{س^٢ - ٦س + ٥}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{س}{(س - ١)(س + ١)} + \frac{٢}{(س - ١)(س - ٥)}$$

$$= \frac{س(س - ٥) + ٢(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)(س - ٥)} = \frac{س^٢ - ٥س + ٢س + ٢}{(س - ١)(س + ١)(س - ٥)}$$

$$= \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{(س - ١)(س + ١)(س - ٥)} = \frac{(س - ١)(س - ٢)}{(س - ١)(س + ١)(س - ٥)}$$

$$= \frac{س - ٢}{(س + ١)(س - ٥)}$$

المجال = ح – { ١ ، -١ ، ٥ }

****

مثـ٦ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

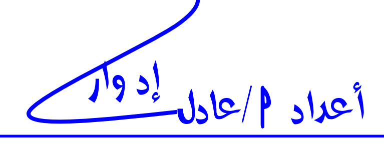
$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٨س + ١٢}{س^٢ - ٤س + ٤} + \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٧س + ١٠}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س - ٦)}{(س - ٢)(س - ٢)} + \frac{(س - ٥)(س + ١)}{(س - ٢)(س - ٥)} = \frac{س - ٦}{س - ٢} + \frac{س + ١}{س - ٢}$$

$$= \frac{س - ٦ + س + ١}{س - ٢} = \frac{٢س - ٥}{س - ٢}$$

****



تمارين على جمع الكسور الجبرية

س أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) $ن(س) = \frac{س}{س+١} + \frac{١}{س+١}$

(٢) $ن(س) = \frac{٥س}{س+٢} + \frac{١٠}{س+٢}$

(٣) $ن(س) = \frac{٢س - ٧}{س - ٥} + \frac{٢ - س}{س - ٥}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^٣ - ٩}{س - ٢} + \frac{١}{س - ٢}$

(٥) $ن(س) = \frac{٢س^٢}{٢س+٥} + \frac{٢س^٢ - ٢٥}{٢س+٥}$

(٦) $ن(س) = \frac{س}{س+٢} + \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$

(٧) $ن(س) = \frac{س}{س^٢ - س} + \frac{س + ١}{س^٢ - ١}$

(٨) $ن(س) = \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٩} + \frac{١}{س+٣}$

(٩) $ن(س) = \frac{٣س+١٥}{س^٢ + ٧س+١٠} + \frac{٢س+١}{س+٢}$

(١٠) $ن(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢+٣س+٢} + \frac{س+١}{س+٢}$

(١١) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س+٤}{س^٣ + ٨} + \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢}$

(١٢) $ن(س) = \frac{٢س^٢ - ٦س+١٨}{س^٣ + ٢٧} + \frac{٦س - ١٢}{س^٢ + س - ٦}$

(١٣) $ن(س) = \frac{٢س - ٦}{س^٢ - ٥س+٦} + \frac{٣س+٩}{س^٢ + س - ٦}$

(١٤) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٢} + \frac{٣س - ١}{٣س^٢ - ٤س+١}$

(١٥) $ن(س) = \frac{٣س+١٥}{س^٢+٧س+١٠} + \frac{٢س^٢ - ٣س - ٢}{س^٢ - ٤}$

طرح الكسور الجبرية

قاعدة الطرح :-

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب}}$$

وأن

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{أ} \times \text{ء} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{ب ء}}$$

****

مثـ١ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{٧}{\text{س} - ١} - \frac{٢}{\text{س} - ١}$$

الحـــل

$$\text{ن(س)} = \frac{٧ - ٢}{\text{س} - ١} = \frac{٥}{\text{س} - ١}$$

المجال = ح - { ١ }

****

مثـ٢ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{٤\text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٨}{\text{س} - ٢}$$

الحـــل

$$\text{ن(س)} = \frac{٤\text{س} - ٨}{\text{س} - ٢} = \frac{٤(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢} = ٤$$

المجال = ح – { ٢ }

****

مثـ٢ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢} - \frac{٧\text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$$

الحـــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} - ١}$$

المجال = ح – { ١ ، ٢ }

****

مثـ٣ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩}{\text{س}^{٣}-٢٧} - \frac{\text{س}^{٢}-\text{س}-١٢}{٩-\text{س}^{٢}}$$

الحـــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩}{(\text{س}-٣)(\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩)} - \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}+٣)}{-(\text{س}^{٢}-٩)}$$

$$= \frac{١}{\text{س}-٣} + \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}+٣)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} = \frac{١}{\text{س}-٣} + \frac{\text{س}-٤}{\text{س}-٣} = \frac{١+\text{س}-٤}{\text{س}-٣}$$

$$= \frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٣} = ١ \qquad \text{المجال} = \text{ح} - \{٣ ، -٣\}$$

****

مثـ٤ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{س}^{٢}-٤\text{س}-٥} + \frac{٢}{١-\text{س}^{٢}}$$

الحـــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{س}^{٢}-٤\text{س}-٥} + \frac{٢}{-(\text{س}^{٢}-١)} = \frac{٤}{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)} - \frac{٢}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$$

$$= \frac{٤(\text{س}-١)-٢(\text{س}-٥)}{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)(\text{س}-١)} = \frac{٤\text{س}-٤-٢\text{س}+١٠}{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)(\text{س}-١)}$$

$$= \frac{٢\text{س}+٦}{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)(\text{س}-١)} \qquad \text{المجال} = \text{ح} - \{٥ ، -١ ، ١\}$$

****

مثـ٥ـال : إذا كان : $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤}{\text{س}^{٣}+٨}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{١-\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}$

أوجد : $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) - \text{ن}_{٢}(\text{س})$

الحـــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤}{\text{س}^{٣}+٨} - \frac{-(\text{س}^{٢}-١)}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤}{\text{س}^{٣}+٨} + \frac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}$$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤}{(\text{س}+٢)(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤)} + \frac{(\text{س}+١)(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)}$$

حيث مجال $\text{ن}(\text{س}) = \text{ح} - \{-٢ ، ١\}$

$$\therefore\ \text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢} = ١$$

****

مثـ٦ـال : إذا كان : $\text{ن}_١(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩}{\text{س}^٣ - ٢٧}$

أوجد : $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_١(\text{س}) - \text{ن}_٢(\text{س})$

الحـــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣} - \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}$$

$$= \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣} - \frac{١}{\text{س} - ٣}$$

حيث مجال $\text{ن}(\text{س}) = \text{ح} - \{٣ ، -٣\}$

$$\therefore\ \text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣) - (\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)} = \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٣}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}$$

****

مثـ٧ـال : أوجد $\text{ن}(\text{س})$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$$

الحـــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{-(\text{س} - ١)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} - \frac{\text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ١}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)} = \text{س}$$

المجال $= \text{ح} - \{١\}$

****

تمارين على طرح الكسور الجبرية

س أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) ن(س) = $\frac{\text{٥س}}{\text{س} - \text{٢}} - \frac{\text{١٠}}{\text{س} - \text{٢}}$

(٢) ن(س) = $\frac{\text{٢س}}{\text{س} - \text{٣}} - \frac{\text{٦}}{\text{س} - \text{٣}}$

(٣) ن(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - \text{٥}} - \frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{٥}}$

(٤) ن(س) = $\frac{\text{٣س} - \text{١}}{\text{س} - \text{٢}} - \frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{٢}}$

(٥) ن(س) = $\frac{\text{٢س} + \text{١١}}{\text{س} + \text{٥}} - \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٥}}$

(٦) ن(س) = $\frac{\text{٣س} + \text{٢}}{\text{س} - \text{٥}} - \frac{\text{١٧}}{\text{س} - \text{٥}}$

(٧) ن(س) = $\frac{\text{٣}}{\text{س} - \text{٢}} - \frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}}$

(٨) ن(س) = $\frac{\text{٢س} + \text{١٠}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧س} + \text{١٠}} - \frac{\text{س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٢}}$

(٩) ن(س) = $\frac{\text{٣س} - \text{١٥}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{٥}} - \frac{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}$

(١٠) ن(س) = $\frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} + \text{س}}{\text{س}^{\text{٣}} - \text{١}} - \frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}$

(١١) ن(س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} + \frac{\text{س}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}$

(١٢) ن(س) = $\frac{\text{٣س}}{\text{س} + \text{١}} - \frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س} + \text{١}}$

(١٣) ن(س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س} - \text{١}} + \frac{\text{س}}{\text{١} - \text{س}}$

(١٤) ن(س) = $\frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{٢}}$

(١٥) ن(س) = $\frac{\text{٤}}{\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{١}} - \frac{\text{١}}{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س}}$

(١٦) ن(س) = $\frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}} - \frac{\text{١٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}$

(١٧) ن(س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٦}} - \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} - \text{١٠}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س} - \text{٥}}$

ضرب الكسور الجبرية

* لكل كسر جبرى $ن(س) \neq 0$ يوجد معكوس ضربى هو مقلوب الكسر و يرمز له بالرمز $ن^{-1}(س)$

فإذا كان : $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ٤}$ حيث : مجال $ن(س) = ح - \{٤\}$

* و بالتالى يمكن إجراء عملية ضرب أو قسمة كسرين جبريين كما يلى :

إذا كان : $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$ كسرين جبريين حيث :

$ن_١(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)}$ فإن :

(١) $ن_١(س) \times ن_٢(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \times \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)} = \frac{د_١(س) \times د_٣(س)}{د_٢(س) \times د_٤(س)}$

حيث : س ∋ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$

أى : $ح - \{ص(د_٢) \cup ص(د_٤)\}$

****

مثـ١ـال : أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

$ن(س) = \frac{٣س + ٦}{س^٢ - ٩} \times \frac{س - ٣}{٢س - ٤}$

الحــل

$ن(س) = \frac{٣(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٣)} \times \frac{س - ٣}{٢(س + ٢)} = \frac{٣}{٢(س + ٣)}$

المجال $= ح - \{٣ ، -٣ ، -٢\}$

****

مثـ٢ـال : أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

$ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١} \times \frac{س^٢ - س}{س^٢ + ٣س}$

الحــل

$ن(س) = \frac{(س - ٤)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} \times \frac{س(س - ١)}{س(س + ٣)} = \frac{س - ٤}{س + ٣}$

المجال $= ح - \{١ ، -١ ، ٠ ، -٣\}$

مثـ٣ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + س - ٦} \times \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٢س + ٤}$$

الحــــل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{٢(س + ٣)}{س^{٢} + ٢س + ٤} = ٢$$

المجال = ح − { -٣ ، ٢ }

****

مثـ٤ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ١٢س + ٣٦}{س^{٢} - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{٣٦ - س^{٢}}$$

الحــــل

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ١٢س + ٣٦}{س^{٢} - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{-(س^{٢} - ٣٦)}$$

$$= \frac{(س - ٦)(س - ٦)}{س(س - ٦)} \times \frac{٤(س + ٦)}{-(س - ٦)(س + ٦)} = \frac{-٤}{س}$$

المجال = ح − { ٠ ، ٦ ، -٦ }

****

مثـ٥ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٣} - ٢٧} \times \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{٢س + ٢}$$

الحــــل

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ١)}{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)} \times \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{٢(س + ١)} = \frac{١}{٢}$$

المجال = ح − { ٣ ، -١ }

****

مثـ٦ـال : أوجد $\text{ن}(\text{س})$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٤} \times \frac{٣\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}$$

الحـــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٢)} \times \frac{(٣\text{س} + ٥)(\text{س} - ٢)}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤} = ٣\text{س} + ٥$$

المجال = ح − {٢ ، ٢-}

****

مثـ٧ـال : إذا كان : $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}{٢\text{س} + ٤}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}$

أوجد : $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) \times \text{ن}_{٢}(\text{س})$

الحـــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ١)(\text{س} + ٢)}{٢(\text{س} + ٢)} \times \frac{٢}{(\text{س} + ١)(\text{س} + ١)}$$

حيث مجال $\text{ن}(\text{س})$ = ح − {−١ ، −٢} ∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ١}$

****

مثـ٧ـال : إذا كان : $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$

أوجد : $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) \div \text{ن}_{٢}(\text{س})$

الحـــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} + ٢)} \div \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}$$

حيث مجال $\text{ن}(\text{س})$ = ح − {−٢ ، −٣ ، ١ , ٢}

$$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} + ٢)} \times \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$$

****

تمارين على ضرب الكسور الجبرية

س أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) $ن(س) = \frac{2}{س^2+س} \times \frac{س+1}{4}$

(٢) $ن(س) = \frac{س+1}{3س-6} \times \frac{6}{2س+2}$

(٣) $ن(س) = \frac{س+2}{س^2-4} \times \frac{2س-4}{س-3}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^2-3س-4}{س+3} \times \frac{س-1}{س^2-1}$

(٥) $ن(س) = \frac{س^2+3س+2}{س^2-9} \times \frac{س-3}{س+2}$

(٦) $ن(س) = \frac{س+1}{س^2-س-2} \times \frac{س^2+3س-10}{س^2+5س}$

(٧) $ن(س) = \frac{س^3-8}{س^2+س-6} \times \frac{2س+6}{س^2+2س+4}$

(٨) $ن(س) = \frac{3س+6}{س^2-4} \times \frac{س-2}{2س+6}$

(٩) $ن(س) = \frac{س^2-5س+6}{س-2} \times \frac{س^2+3س+9}{س^3-27}$

(١٠) $ن(س) = \frac{س^2-3س-4}{س^2-1} \times \frac{س^2-س}{س^2+3س}$

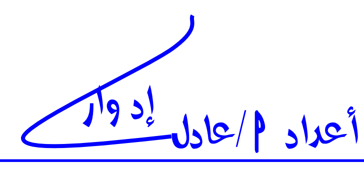
(١١) $ن(س) = \frac{س^2-5س+6}{س^2-9} \times \frac{س^2+5س+6}{س^2-4}$

(١٢) $ن(س) = \frac{س^3+2س^2}{س^3+1} \times \frac{س^2-س+1}{س^2}$

(١٣) $ن(س) = \frac{5س+5}{س+6} \times \frac{س^2+3س-18}{س^2-2س-3}$

(١٤) $ن(س) = \frac{س^3-8}{(س-2)^3} \times \frac{س^2-4}{س^2+2س+4}$

(١٥) $ن(س) = \frac{س^2+2س}{س^3-27} \times \frac{س^2+3س+9}{س+2}$



قسمة الكسور الجبرية

* لكل كسر جبرى ن(س) ≠ ٠ يوجد معكوس ضربى هو مقلوب الكسر
و يرمز له بالرمز ن$^{-١}$(س)

فإذا كان : ن(س) = $\frac{س + ٣}{س - ٤}$ فإن : ن$^{-١}$(س) = $\frac{س - ٤}{س + ٣}$

حيث : مجال ن(س) = ح − { ٤ } ، مجال ن$^{-١}$(س) = ح − { ٤ ، −٣ }

و يكون : ن(س) × ن$^{-١}$(س) = ١

* و بالتالى يمكن إجراء عملية قسمة كسرين جبريين كما يلى :
إذا كان : ن$_١$(س) ، ن$_٢$(س) كسرين جبريين حيث :

ن$_١$(س) = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ ، ن$_٢$(س) = $\frac{د_٣(س)}{د_٤(س)}$ فإن :

ن$_١$(س) ÷ ن$_٢$(س) = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ ÷ $\frac{د_٣(س)}{د_٤(س)}$ = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ × $\frac{د_٣(س)}{د_٤(س)}$

و يكون مجال ن$_١$(س) ÷ ن$_٢$(س) هو المجال المشترك لكل من :
ن$_١$(س) ، ن$_٢$(س) ، ن$_٢^{-١}$(س)
أى : ح − { ص(د$_٢$) ∪ ص(د$_٣$) ∪ ص(د$_٤$) }

****

مثـال١ : إذا كان ن(س) = $\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ - ٩}$ أوجد

(١) المجال الذى يكون فيه للكسر معكوس ضربى (٢) ن$^{-١}$(١) ، ن$^{-١}$(٣) ،

(٣) قيمة س التى تحقق أن ن$^{-١}$(س) = $\frac{٣}{٥}$

الحـــــل

ن$^{-١}$ = $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$ = $\frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)(س - ٢)}$ = $\frac{س + ٣}{س - ٢}$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ ، ٢ }

∴ $\text{د}^{-1}(1) = \frac{1+3}{1-2} = \frac{4}{-1} = -1$

$\text{د}^{-1}(2)$ غير معرفة لان العدد $2 \notin$ لمجال الدالة

$\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{3}{5}$ 　　∴ $\frac{\text{س}+3}{\text{س}-2} = \frac{3}{5}$

∴ $5\text{س} + 15 = 3\text{س} - 6$ 　　∴ $5\text{س} - 3\text{س} = -6 - 15$

∴ $2\text{س} = -21$ 　　∴ $\text{س} = \frac{-21}{2}$

****

مثـــ٢ـــال : أوجد د(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^3 - 1} \div \frac{\text{س} + 1}{\text{س}}$$

الحـــــل

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^3 - 1} \times \frac{\text{س}}{\text{س}+1} = \frac{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)} \times \frac{\text{س}}{\text{س}+1}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{س}+1}$$

المجال = $\text{ح} - \{1 ، 0 ، -1\}$

****

مثـــ٣ـــال : أوجد د(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2 + \text{س} - 6} \div \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4}{2\text{س} + 6}$$

الحـــــل

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2 + \text{س} - 6} \times \frac{2\text{س} + 6}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4}$$

$$= \frac{(\text{س}-2)(\text{س}^2+2\text{س}+4)}{(\text{س}+3)(\text{س}-2)} \times \frac{2(\text{س}+3)}{\text{س}^2+2\text{س}+4} = 2$$

المجال = $\text{ح} - \{-3 ، 2\}$

****

مثـ٤ـال : أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{٢س^٢ - س - ٦} \div \frac{٢س^٢ - ٣س}{٤س^٢ - ٩}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{٢س^٢ - س - ٦} \times \frac{٤س^٢ - ٩}{٢س^٢ - ٣س}$$

$$= \frac{س(س - ٣)}{(٢س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{س(٢س - ٣)} = \frac{س - ٣}{س - ٢}$$

$$\text{المجال} = ح - \{\frac{-٣}{٢} ، ٢ ، ٠ ، \frac{٣}{٢}\}$$

****

مثـ٥ـال : أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ - ١} \div \frac{س - ١}{س^٢ + س + ١}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ - ١} \times \frac{س^٢ + س + ١}{س - ١}$$

$$= \frac{(س - ١)(س - ١)}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} \times \frac{س^٢ + س + ١}{س - ١} = ١$$

$$\text{المجال} = ح - \{١\}$$

****

مثـ٦ـال : أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٤س}{س^٢ - س - ٢٠} \div \frac{٢س^٣ + س^٢ - ٣س}{٢س^٢ - ٧س - ١٥}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٤س}{س^٢ - س - ٢٠} \times \frac{٢س^٢ - ٧س - ١٥}{٢س^٣ + س^٢ - ٣س}$$

$$= \frac{س(س^٢ + ٣س - ٤)}{(س + ٤)(س - ٥)} \times \frac{(٢س + ٣)(س - ٥)}{س(٢س^٢ + س - ٣)}$$

$$= \frac{س(س + ٤)(س - ١)}{(س + ٤)(س - ٥)} \times \frac{(٢س + ٣)(س - ٥)}{س(٢س + ٣)(س - ١)} = ١$$

$$\text{المجال} = ح - \{-٤ ، ٥ ، ٠ ، ١ ، \frac{-٣}{٢}\}$$

****

مثـ٧ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{٢س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \frac{\text{٢س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - \text{٦س} + ٩}$$

الحـــــــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{٢س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \times \frac{\text{س}^{٢} - \text{٦س} + ٩}{\text{٢س} - ١٠}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)}{٢(\text{س} - ٥)} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$$

المجال = ح − { ٣ ، -٣ ، ٥ }

****

مثـ٨ـال : إذا كان : $\text{ن}_{١}\text{(س)} = \frac{\text{س}^{٢} + \text{٢س} - ٣}{\text{س}^{٢} + \text{٥س} + ٦}$ ، $\text{ن}_{٢}\text{(س)} = \frac{٢}{\text{س}^{٢} + \text{٢س} + ١}$

أوجد : $\text{ن(س)} = \text{ن}_{١}\text{(س)} \div \text{ن}_{٢}\text{(س)}$

الحـــــــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٣)} \div \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}$$

حيث مجال ن(س) = ح − { −٢ ، −٣ ، ١ ، ٢ }

$$\therefore \text{ن(س)} = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$$

****

تمارين على قسمة الكسور

[١] أوجد المجال الذى يكون فيه لكل من الكسور الجبرية الاتية معكوس ضربى وأوجد هذا المعكوس فى أبسط صورة :.

(١) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{٥}$

(٢) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٧}{\text{س}}$

(٣) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}}$

(٤) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٣}$

(٥) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$

(٦) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$

(٧) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$

(٨) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}$

(٩) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^{٢} - ٤}$

(١٠) $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٩$

(١١) $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢$

(١٢) $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}$

[٢] إذا كانت $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ١}$ أوجد $\text{ن}^{-١}(\text{س})$ فى أبسط صورة وعين مجاله ثم أوجد $\text{ن}^{-١}(١)$ ، $\text{ن}^{-١}(٢)$ إن أمكن ذلك

[٣] إذا كانت $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$ أوجد $\text{ن}^{-١}(\text{س})$ فى أبسط صورة وعين مجاله ثم أوجد $\text{ن}^{-١}(٠)$ ، $\text{ن}^{-١}(٢)$ إن أمكن ذلك

[٤] إذا كانت $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - ١}$ أوجد $\text{ن}^{-١}(\text{س})$ فى أبسط صورة وعين مجاله ثم أوجد $\text{ن}^{-١}(١)$ ، $\text{ن}^{-١}(٢)$ إن أمكن ذلك

[٥] أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) ن(س) = $\frac{س}{س+٣} \div \frac{س}{س-٢}$

(٢) ن(س) = $\frac{س}{س-٥} \div \frac{س-٣}{س-٥}$

(٣) ن(س) = $\frac{س-٢}{س+١} \div \frac{س-٢}{س-٣}$

(٤) ن(س) = $\frac{س}{س+٢} \div \frac{س^{٢}}{س^{٢}-٤}$

(٥) ن(س) = $\frac{س^{٢}-٥س+٦}{س^{٢}} \div \frac{س-٢}{س}$

(٦) ن(س) = $\frac{س^{٢}-٩}{س^{٢}} \div \frac{س+٣}{س}$

(٧) ن(س) = $\frac{س-١}{س^{٢}+س-٢} \div \frac{١}{٣س+٦}$

(٨) ن(س) = $\frac{س}{س^{٢}-٤} \div \frac{س^{٢}+س}{س^{٢}-س-٢}$

(٩) ن(س) = $\frac{س^{٢}-٥س+٦}{س^{٢}-٩} \div \frac{س^{٢}-٤}{س^{٢}+٥س+٦}$

(١٠) ن(س) = $\frac{س^{٢}+٢س-٣}{س+٣} \div \frac{س^{٢}-١}{س+١}$

(١١) ن(س) = $\frac{س^{٣}-٨}{س^{٢}+س-٦} \div \frac{س^{٢}+٢س+٤}{٢س+٦}$

(١٢) ن(س) = $\frac{س^{٣}-٨}{س^{٣}-٧س^{٢}+١٠س} \div \frac{س^{٢}+٢س+٤}{٣س^{٢}-١٥س}$

(١٣) ن(س) = $\frac{٤س^{٢}-١}{س^{٢}+٣س+٩} \div \frac{٢س^{٢}-٥س+٢}{س^{٣}-٢٧}$

(١٤) ن(س) = $\frac{٥}{س^{٢}-٢س-٣} \div \frac{١}{١-س^{٢}}$

(١٥) ن(س) = (س+٢) $\div \frac{س^{٢}+٥س+٦}{٢س+٦}$

(١٦) ن(س) = (س-٢) $\div \frac{س^{٢}-٤}{س+٢}$

تمــارين عامة على الوحدة

١ ـ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) إذا كان: س ≠ ٠ فإن : $\frac{٣}{س} + \frac{٤}{س}$ .....

[$\frac{٧}{س^٢}$ ، $\frac{٧}{س}$ ؛ $\frac{٧}{٢س}$ ، $\frac{١٢}{س^٢}$]

٢) المعكوس الجمعى للكسر $\frac{س + ١}{س - ٣}$ هو .....

[$\frac{س - ١}{س - ٣}$ ، $\frac{١ - س}{٣ - س}$ ، $\frac{س + ١}{٣ - س}$ ، $\frac{س + ١}{س + ٣}$]

٣) مجال المعكوس الجمعى للكسر $\frac{س + ١}{س - ٣}$ هو .....

[ح − {١} ، ح − {٣} ، ح ، ح − {٣ ، −١}]

٤) $\frac{س}{س - ٢} - \frac{٢}{س - ٢} = ١$ لكل س ∋ .....

[{٢ ، ١} ، ح ، ح − {٢} ، {٢}]

٥) أبسط صورة للمقدار : $\frac{س}{س + ٥} - \frac{-٥}{س + ٥}$ حيث : س ≠ − ٥ هى .....

[١ ، صفر ، ٥ ، − ٥]

٦) ن(س) = $\frac{س}{س - ٣} - \frac{س}{٣ - س}$ = ... [١ ، صفر ، ٢ س ، $\frac{٢ س}{س - ٣}$]

٧) مجال الدالة : د (س) = $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ $\frac{س - ٣}{س - ١}$ هو .....

[ح − {٢ ، ٠} ، ح − {٣ ، ٢} ، ح − {−٣ ، ٢} ، ح − {١ ، −٣}]

٨) ن(س) = $\frac{س - ١}{س}$ له معكوس ضربى فى المجال .....

[ح − {١} ، ح − {٠} ، ح ، ح − {٠ ، ١}]

٩) إذا كانت : د (س) = $\frac{س}{س - ٣}$ فإن : مجال د$^{-١}$ (س) = ...

[ح − { ٠ ، ٣ } ، ح − { ٠ ، −٣ } ، ح − { ٣ } ، ح − { −٣ }]

١٠) المعكوس الضربى للكسر $\frac{س - ٣}{س + ٤}$ هو ....

[$\frac{س - ٤}{س + ٣}$ ، $\frac{س - ٤}{س - ٣}$ ؛ $\frac{س + ٤}{س + ٣}$ ، $\frac{س + ٤}{س - ٣}$]

١١) المعكوس الضربى للكسر $\frac{٢س - ٤}{س^٢ - ٤}$ هو ....

[$\frac{س + ٢}{٢}$ ، $\frac{س - ٢}{س + ٢}$ ؛ $\frac{٢}{س + ٢}$ ، $\frac{س - ٢}{٢}$]

١٢) إذا كانت : د (س) = $\frac{س - ١}{س + ٣}$ فإن : د$^{-١}$ (٠) = ...

[١ ، − ١ ، ٣ ، − ٣]

١٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ٣}{س^٣ + ٢٧}$ فإن : د$^{-١}$ (١) = ...

[٧ ، − ٧ ، ١ ، − ١]

٢ − فى كلاً مما يأتى أوجد ن(س) فى أبسط صورة مع بيان المجال :

١) ن (س) = $\frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٩} + \frac{١}{س + ٣}$

٢) ن (س) = $\frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$

٣) ن (س) = $\frac{٢س - ٦}{س^٢ - ٥س + ٦} + \frac{٣س + ٩}{س^٢ + س - ٦}$

٤) ن (س) = $\frac{س}{س + ١} + \frac{٢س^٢}{س^٣ - س}$

٥) ن (س) = $\frac{٢س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٥س + ٤} + \frac{٨}{٤ - س}$

٦) $ن(س) = \dfrac{س - 1}{س^2 + س - 2} + \dfrac{س + 5}{س^2 + 7س + 10}$

٧) $ن(س) = \dfrac{س^2 + 3س}{س^2 - 9} - \dfrac{2س + 2}{س^2 - 2س - 3}$

٨) $ن(س) = \dfrac{س^2 - 4}{س^2 + س - 2} + \dfrac{1}{1 - س}$

٩) $ن(س) = \dfrac{س^2}{س^2 - 2س} - \dfrac{س^2 + 3س + 2}{4 - س^2}$

١٠) $ن(س) = \dfrac{3س - 15}{س^2 - 8س + 15} - \dfrac{س^2 - 3س - 18}{9 - س^2}$

٣ ـ فى كلاً مما يأتى أوجد فى أبسط صورة المعكوس الضربى للكسور الآتية مع بيان المجال :

١) $ن(س) = \dfrac{س + 5}{س - 9}$

٢) $ن(س) = \dfrac{س^3 - 8}{س^2 + 2س + 4}$

٣) $ن(س) = \dfrac{س^2 - 9}{س^2 - 5س + 6}$

٤ـ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال فى كل مما يأتى :

١) $ن(س) = \dfrac{س^3 - 8}{س^2 - 3س + 2} \times \dfrac{2س^2 + س - 3}{س^3 + 2س^2 + 4س}$

٢) $ن(س) = \dfrac{3س^2 - 6س}{س^2 - 4} \times \dfrac{س^2 + 3س + 2}{س^2 + س}$

٣) $ن(س) = \dfrac{2س + 10}{س^2 - 3س} \times \dfrac{س^2 - 8س + 15}{س^2 - 25}$

٤) ن(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ٣س + ٢} \div \frac{س^٢ - س}{س^٢ + ٢س}$

٥) ن(س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - س - ٢} \div \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٢ + ٤س + ٣}$

٥ ـ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{ك}{س} + \frac{٩}{س + أ}$ هو : ح − { ٠ ، −٤ }

، د (٥) = ٢ أوجد قيمة كل من : ك ، أ

٦ ـ إذا كان : د (س) = $\frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ + س - ٦}$ أوجد : $د^{-١}$ (س) وعين مجاله

، إذا كان $د^{-١}$ (س) = ٢ فأوجد قيمة س

٧ ـ إذا كان مجال الدالة د (س) = $\frac{س + ٥}{س - ك}$ هو ح − { −٢ } أوجد قيمة ك

، هل د (س) لها معكوس ضربى ؟

٨ ـ إذا كان : د (س) = $\frac{س + ٢}{س^٢ - ٤} \div \frac{س - ٣}{٢س - ٤}$ أوجد د (س) فى أبسط صورة

مبيناً مجال د ثم أوجد د (٢) ، د (١) إن أمكن

٩ ـ إذا كان : د (س) = $\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ - ٩} \div \frac{س - ٢}{س^٣ + ٢٧}$ أوجد د (س) فى أبسط

صورة ، إذا كان : د (س) = ٩ أوجد قيمة س

١٠ ـ إذا كان المعكوس الضربى للكسر $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢س + ك}$ هو $\frac{س - ٤}{س}$

فما هى قيمة ك ؟ ثم أوجد مجال الكسر الذى يحقق ذلك

****

الوحدة الثالثة

الاحصـاء

(١) العمليات على الأحداث

(٢) الحدث المكمل

(٣) الفرق بين حدثين

(٤) تمارين على الوحدة

العمليات على الأحداث

نعلم أن :

التجربة العشوائية :

هى تجربة يمكن معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً إلا بعد إجرائها

فضاء العينة " ف " :

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية

أمثلة لتجارب عشوائية و فضاء العينة لكل منها و عدد عناصرها :

التجربة العشوائية	النتائج الممكنة	عدد العناصر
إلقاء قطعة نقود مرة واحدة	صورة ، كتابة	٢
نوع المولود لأسرة (دون وجود توأم)	ولد ، بنت	٢
إلقاء حجر نرد مرة واحد و ملاحظة عدد النقاط على الوجه العلوى	١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦	٦
تكوين عدد مكون من الرقمين ١ ، ٣	١١ ، ١٣ ، ٣١ ، ٣٣	٤
نتيجة مباراة كرة قدم	فوز ، تعادل ، خسارة	٣

أنواع الأحداث :

* **الحدث المستحيل** : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه و يعبر عنه بالرمز ∅ ، ل (∅) = صفر
* **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة و يعبر عنه بالرمز ف ، ل (ف) = ١
* **الحدث الممكن** : هو بعض النواتج الممكنة للتجربة و يعبر عنه بالرمز مثلاً (ٲ)

ملاحظات :

* أى حدث ٲ ⊂ ف ، و إحتمال حدوثه = كسراً أى أن : ٠ ⩽ ل (ٲ) ⩽ ١

* يمكن كتابة الإحتمال فى صورة كسر إعتيادى أو كسر عشرى أو نسبة مئوية كما يلى :

مؤكد الحدوث	غالباً	أحياناً	نادراً	مستحيل الحدوث
١	٣	١	١	٠
١٠٠ ٪	٧٥ ٪	٥٠ ٪	٢٥ ٪	٠ ٪

إحتمال وقوع الحدث

الحدث مجموعة جزئية من فضاء العينة

أنواع الاحداث

(١) الحدث الاولى (البسيط) :- هو الحدث الذى يحتوى على عنصر واحد من ف

(٢) الحدث المؤكد :- هو الحدث الذى يحتوى على جميع عناصر الفضاء (ف)

(٣) الحدث المستحيل:- هو الحدث الذى لا يحتوى على أية عناصر (المجموعة الخالية ϕ)

إحتمال وقوع حدث ما ٲ يعطى من القانون :

$$ل (ٲ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ٲ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{ن (ٲ)}{ن (ف)}$$

حيث : ل (ٲ) إحتمال وقوع الحدث (ٲ) ، ن (ٲ) عدد عناصر الحدث (ٲ)
، ن (ف) عدد عناصر فضاء العينة ف

****

مثــ١ــال : فى تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة أكتب فضاء العينة ثم عين احتمال كلا من الاحداث الاتية

(١) ٲ = حدث ظهور عدد فردى (٢) ب = حدث ظهور عدد أولى

(٣) جـ = حدث ظهور عدد فردى ، أولى (٤) ء = حدث ظهور عدد فردى أو أولى

الحـــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ن (ف) = ٦

(١) ٲ = حدث ظهور عدد فردى = {١ ، ٣ ، ٥ } ∴ ن (ٲ) = ٣

∴ ل(ٲ) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

(٢) ب = حدث ظهور عدد أولى= { ٢ ، ٣ ، ٥ } ∴ ن (ب) = ٣

∴ ل(ب) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

(٣) جـ = حدث ظهور عدد فردى ، أولى = { ٣ ، ٥ } ∴ ن (جـ) = ٢

∴ ل(جـ) = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٤) ء = حدث ظهور عدد فردى أو أولى= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ∴ ن (ء) = ٤

∴ ل (ء) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

****

مثـ٢ـال : سلة بها ١٥ بطاقات مرقمة من ١ الى ١٥ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيا أكتب فضاء العينة ثم عين كلا من أحتمال الاحداث الاتية

(١) ﺃ حدث ظهور عدد زوجى　　　(٢) ب حدث ظهور عدد أولى

(٣) جـ حدث ظهور عدد زوجى أولى　　　(٤) ء حدث ظهور عدد زوجى أو أولى

الحـــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ...... ، ١٥}　　　ن (ف) = ١٥

(١) ﺃ= حدث ظهور عدد زوجى = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ }

ن (ﺃ) = ٧　　　∴ ل(ﺃ) = ٧/١٥

(٢) ب = حدث ظهور عدد أولى = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣}

ن (ب) = ٦　　　∴ ل(ب) = ٦/١٥ = ٢/١٥

(٣) جـ = حدث ظهور عدد زوجى وأولى = { ٢ }

ن (جـ) = ١　　　∴ ل(جـ) = ١/١٥

(٤) ء = حدث ظهور عدد زوجى أو أولى

ء = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣}

ن (ء) = ١٢　　　∴ ل(ء) = ١٢/١٥ = ٤/٥

****

مثـ٣ـال : سلة بها ٢٠كرة بها ٨ كرات حمراء ، ٧ كرات بيضاء ، ٥ كرات صفراء فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيا أوجد أحتمال أن تكون الكرة المسحوبة

(١) حمراء　　　(٢) حمراء أو صفراء　　　(٣) ليست صفراء

الحـــــل

أحتمال أن تكون الكرة حمراء = (عدد الكرات الحمراء) / (العدد الكلى) = ٨/٢٠ = ٢/٥

احتمال أن تكون الكرة حمراء أو صفراء = (عدد الحمراء + عدد الصفراء) / (العدد الكلى) = ١٣/٢٠

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست صفراء = (عدد الحمراء + عدد البيضاء) / (العدد الكلى) = ١٥/٢٠

****

مثـ٤ـال : صندوق به ١٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠ خلطت و سحبت بطاقة عشوائياً
أوجد إحتمال الأحداث التالية :

[١] الحدث (ﺃ) هو : عدد يقبل القسمة على ٢

[٢] الحدث (ب) هو : عدد يقبل القسمة على ٣

[٣] الحدث (حـ) هو : عدد يقبل القسمة على ٢ ، و يقبل القسمة ٣ فى نفس الوقت

الحـــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ن (ف) = ١٠

[١] الحدث (ﺃ) = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ن (ﺃ) = ٥

ل (ﺃ) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث ﺃ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ = $\frac{\text{ن (ﺃ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ = ٥٠ ٪

[٢] الحدث (ب) = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، ن (ب) = ٣

ل (ب) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث ب}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ = ٣٠ ٪

[٣] الحدث (حـ) = { ٦ } ، ن (جـ) = ١

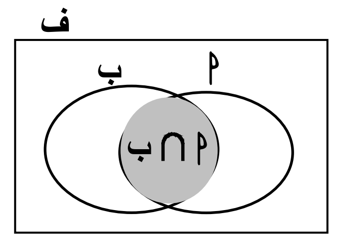
ل (حـ) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث حـ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ = $\frac{\text{ن (حـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{١٠}$ = ٠,١ = ١٠ ٪

****

العمليات على الأحداث

حيث أن الأحداث هى مجموعات جزئية من فضاء العينة لذا فإن العمليات على الأحداث هى نفس العمليات على المجموعات مثل التقاطع و الإتحاد

و بإعتبار أن فضاء العينة (ف) المجموعة الشاملة يمكن التعبير عن الأحداث و العمليات عليها بأشكال فن كما يلى :



أولاً : التقاطع

إذا كان : ٵ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن :
تقاطع الحدثين ٵ ، ب و الذى يرمز له بالرمز ٵ ∩ ب
يعنى حدث وقوع ٵ و ب معاً
و يكون : ل (ٵ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (ٵ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}}$

ملاحظة :
يقال أن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة عنصراً من عناصر المجموعة التى تعبر عن هذا الحدث

****

مثـ١ـال : إذا كان ل (ٵ) = ٠.٤ ، ل (ب) = ٠.٧ ، ل (ٵ ∪ ب) = ٠.٩ أوجد ل (ٵ ∩ ب)

الحـــــــل

ل (ٵ ∩ ب) = ل (ٵ) + ل (ب) – ل (ٵ ∪ ب) = ٠.٤ + ٠.٧ – ٠.٩ = ٠.٢

****

مثـ٢ـال : صندوق به ١٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠ خلطت و سحبت بطاقة عشوائياً أوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً :
[١] يقبل القسمة على ٢ [٢] يقبل القسمة على ٣
[٣] يقبل القسمة على ٢ و يقبل القسمة ٣

الحـــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ن (ف) = ١٠

[١] بفرض أن الحدث (ٵ) هو أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٢

∴ الحدث (ٵ) = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ن (ٵ) = ٥

∴ ل (ٵ) = $\frac{\text{ن (ٵ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

[٢] بفرض أن الحدث (ب) هو أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٣

∴ الحدث (ب) = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، ن (ب) = ٣

∴ ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٣}{١٠}$

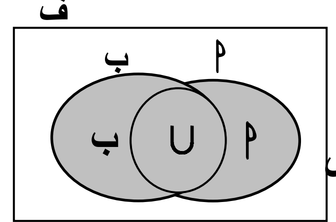
[٣] إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٢ و يقبل القسمة ٣

= إحتمال وقوع أ و ب معاً = { ٦ } ، ن (أ ∩ ب) = ١

ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{١٠}$

****

ثانياً : الإتحاد



إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن :

إتحاد الحدثين أ ، ب و الذى يرمز له بالرمز أ ∪ ب يعنى حدث وقوع أ أو ب ، أو كلاهما ، أى حدث وقوع أحدهما على الأقل

و يكون : ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$

****

مثـ٣ـال : إذا كان أ ، ب حدثين من ف وكان ل (أ) = ٠.٥ ، ل (ب) = ٠.٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠.٣ أوجد ل (أ ∪ ب)

الحـــل

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب) = ٠.٥ + ٠.٦ – ٠.٣ = ٠.٨

****

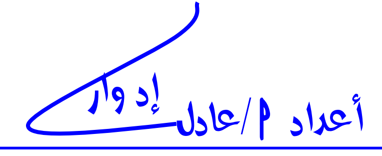
مثـ٤ـال : إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما و كان : ل (أ) = ٠,٤٣ ، ل (ب) = ٠,٣٢ ، ل (أ ∩ ب) = ٠.٣ أوجد : ل (أ ∪ ب)

الحـــل

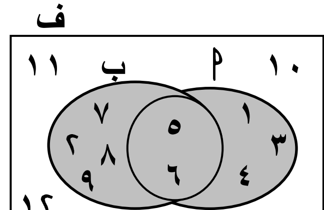
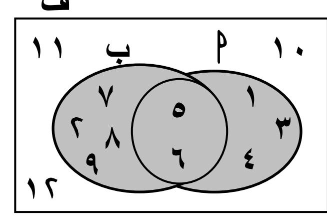
∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٤٣ + ٠,٣٢ – ٠.٣ = ٠.٤٥

****



مثـــال : من الشكل المقابل أحسب إحتمال :

[١] ل (أ) [٢] ل (ب)

[٣] ل (أ ∩ ب) [٣] ل (أ ∪ ب)

الحـــــــل

من الشكل نجد : ن (ف) = ١٢ ، ن (أ) = ٥

، ن (ب) = ٦ ، ن (أ ∩ ب) = ٢ ، ن (أ ∪ ب) = ٩

∴ [١] ل (أ) = $\frac{٥}{١٢}$ ، [٢] ل (ب) = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

[٣] ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{١٢}$ = $\frac{١}{٦}$ ، [٣] ل (أ ∪ ب) = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

ملاحظة : ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

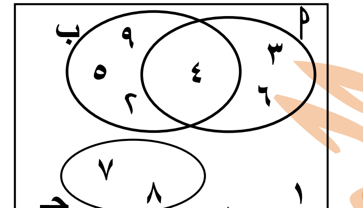
= $\frac{٥}{١٢}$ + $\frac{٦}{١٢}$ − $\frac{٢}{١٢}$ = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ = ل (أ ∪ ب)

أى أن : ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

****

تدريب :


من الشكل المقابل أوجد :




[١] ل(أ ∩ ب) [٢] ل(أ ∩ حـ)

[٣] ل(ب ∩ حـ) [٤] ل (أ ∪ ب)

[٥] ل(أ ∩ حـ) [٦] ل(ب ∩ حـ)

****

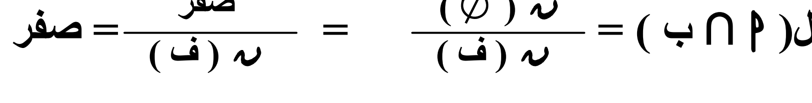
الأحداث المتنافية :

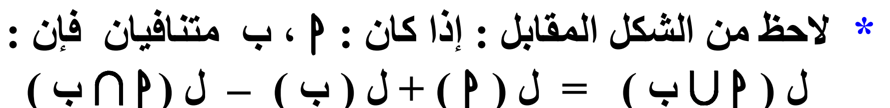

* يقال أن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان : أ ∩ ب = ∅


* و يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى

* لاحظ من الشكل المقابل : إذا كان : أ ، ب متنافيان فإن :

ف
ب
أ

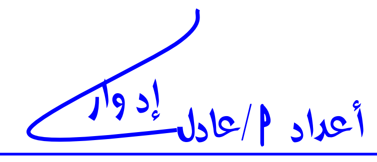

ل(أ ∩ ب) = $\frac{ن (∅)}{ن (ف)}$ = $\frac{صفر}{ن (ف)}$ = صفر


* لاحظ من الشكل المقابل : إذا كان : أ ، ب متنافيان فإن :

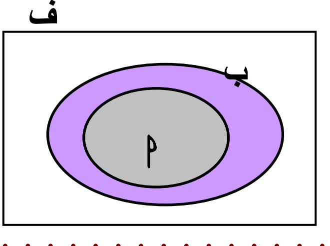
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل(أ ∩ ب)

= ل (أ) + ل (ب) − صفر

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)



ملاحظة :



* إذا كان : ا ⊃ ب فإن :
- ا ∩ ب = ا ، و يكون : ل (ا ∩ ب) = ل (ا)
- ا ∪ ب = ب ، و يكون : ل (ا ∪ ب) = ل (ب)

****

مثـ٦ـال : إذا كان ا ، ب حدثان متنافيان ، ل (ا) = ٠.٥ ، ل (ب) = ٠.٣ أوجد ل (ا ∪ ب)

الحـــــــــل

ا ، ب حدثان متنافيان فإن ل (ا ∩ ب) = صفر

∴ ل (ا ∪ ب) = ل (ا) + ل (ب) = ٠.٥ + ٠.٣ = ٠.٨

****

مثـ٧ـال : إذا كان ا ، ب حدثين من ف ، ل(ا) = $\frac{٣}{٥}$ ؛ ل(ا ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$

أوجد ل(ب) إذا كان : [١] ا ، ب حدثين متنافيين [٢] ا ⊃ ب

الحـــــــــل

[١] ∵ ا ، ب حدثين متنافيين

∴ ل (ا ∪ ب) = ل (ا) + ل (ب)

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٣}{٥}$ + ل (ب)

∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

[٢] ∵ ا ⊃ ب

∴ ل (ا ∪ ب) = ل (ب) ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$

****

مثـ٨ـال : إذا كان ا ، ب حدثين من ف حيث ا ⊃ ب ، ل (ا) = ٠.٥ وأحتمال وقوع ب فقط = ٠.٣ أوجد أحتمال عدم وقوع ب

الحـــــــــل

∵ ا ⊃ ب ∴ ل (ا ∩ ب) = ل (ا) = ٠.٥

∵ ل(ب − ا) = ٠.٣ ∵ ل(ب) − ل (ا ∩ ب) = ٠.٣

∴ ل(ب) − ٠.٥ = ٠.٣ ∴ ل(ب) = ٠.٣ + ٠.٥= ٠.٨

أحتمال عدم وقوع ب ∴ ل(ب̸) = ١ − ل (ب) = ١ − ٠.٨ = ٠.٢

مثـ٩ـال :حدثان متنافيان وأحتمال وقوع أحدهما ضعف أحتمال وقوع الاخر وأحتمال وقوع واحد فيهما على الاقل ٠.٦ أوجد أحتمال وقوع كلا منهما .

الحـــــــــل

ل (س ∩ ص) = صفر ، ل(س) = ك ، ل(ص) = ٢ك

∵ ل (س ∪ ص) = ٠.٦ ∴ ل(س) + ل(ص) = ٠.٦

ك + ٢ ك = ٠.٦ ٣ك = ٠.٦ ∴ ك = ٠.٢

∴ ل(س) = ٠.٢ ∴ ل(ص) = ٠.٤

****

مثـ١٠ـال :إذا كان س ، ص حدثين من ف بحيث ل(س) = ٠.٥ ، ل(س ∪ ص) = ٠.٨ ، أوجد ل(ص) التى تحقق أن

(١) س ، ص متنافيان (٢) س ⊃ ص (٣) ل(س ∩ ص) = ٠.٣

الحـــــــــــل

(١) س ، ص متنافيان ∴ ل(س ∩ ص) = صفر

∵ ل(س ∪ ص) = ٠.٨ ∴ ل(س) + ل(ص) = ٠.٨

٠.٥ + ل(ص) = ٠.٨ ∴ ل(ص)=٠.٣

(٢) س ⊃ ص ∴ ل(س ∩ ص) = ل(س)

ل(س ∩ ص) = ل(ص) = ٠.٨

(٣) ∵ ل(س ∩ ص)= ٠.٣ ، ل(س ∪ ص) = ٠.٨

∴ ل(س) + ل(ص) – ل(س ∩ ص) =

٠.٥ + ل(ص) – ٠.٣ = ٠.٨ ∴ ل(ص) = ٠.٨ +٠.٣ – ٠.٥ = ٠.٦

****

مثـ١١ـال : يتسابق ثلاث طلاب ﻡ ، ب ، جـ فى مسابقة للسباحة فإذا كان احتمال فوز (ﻡ) يساوى احتمال فوز (ب) واحتمال فوز (جـ) يساوى نصف أحتمال فوز (ﻡ) أوجد احتمال فوز ب أو جـ علما بأن واحد فقط سوف يفوز بالمسابقة.

الحـــــــل

ل(م) = ٢س ، ل(ب) = ٢س ، ل(جـ) = س ف = { م ، ب ، جـ }

∴ ل (م) + ل(ب) + ل(جـ) = ١

٢س + ٢س + س = ١ ٥س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٥}$

∴ ل(م) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(جـ) = $\frac{١}{٥}$

∴ ل(ب ∪ جـ) = ل(ب) + ل(جـ) = $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

****

مثـــ١٢ـــال :يتسابق ثلاث طلاب م ، ب ، جـ فى مسابقة للسباحة فإذا كان احتمال فوز(م) يساوى ضعف احتمال فوز (ب) واحتمال فوز (جـ) يساوى نصف أحتمال فوز (ب) أوجد احتمال فوز (م) أو جـ علما بأن واحد فقط سوف يفوز بالمسابقة.

الحـــــــل

∵ ل(م) = ٤س ، ل(ب) = ٢س ، ل(جـ) = س ف = { م ، ب ، جـ }

∴ ل(م)+ ل(ب)+ ل(جـ) = ١

∴ ٤ س + ٢س + س = ١ ٧س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٧}$

∴ ل(م) = $\frac{٤}{٧}$ ل(ب) = $\frac{٢}{٧}$ ل(جـ) = $\frac{١}{٧}$

∴ ل(م ∪ جـ) = ل (م) + ل (جـ) = $\frac{٤}{٧}$ + $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٥}{٧}$

****

مثـــ١٣ـــال : سلة بها ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ الى ٣٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيا أوجد فضاء العينة ثم عين احتمال كلا من الاحداث الاتية

(١) م = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥
(٢) ب = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤
(٣) جـ = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ ، ٥
(٤) ء = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ أو ٥

الحـــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ٣٠ }

(١) م = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥

م = { ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ } ∴ ل(م) = $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{١}{٥}$

(٢) ب = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤

ب = { ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ٢٨ } ∴ ل(جـ) = $\frac{٧}{٣٠}$

(٣) جـ = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ ، ٥ معا

جـ = { ٢٠ }　　∴ ل (جـ) = $\frac{١}{٣٠}$

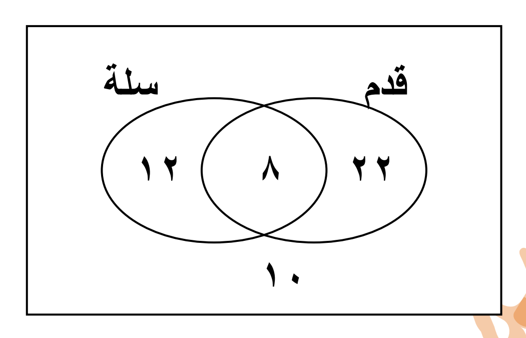
(٤) ء = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ أو ٥

ء = { ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ٢٨ ، ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٠}

∴ ل (ء) = $\frac{١٢}{٣٠}$ = $\frac{٦}{١٥}$

****

مثـــال ١٤ : فصل دراسى به ٥٢ طالب منهم ٣٠ طالب يلعبون كرة القدم ، ٢٠ طالب يلعبون كرة السلة٨ طلاب يلعبون اللعبتين معا فإذا أختير طالب واحد عشوائيا أوجد أحتمال أن يكون الطالب المختار



(١) ممن يلعبون كرة القدم = $\frac{٣٠}{٥٢}$

(٢) ممن يلعبون كرة السلة = $\frac{٢٠}{٥٢}$

(٣) ممن يلعبون القدم فقط = $\frac{٢٢}{٥٢}$

(٤) ممن يلعبون السلة فقط = $\frac{١٢}{٥٢}$

(٥) ممن لا يلعبون القدم = $\frac{٢٢}{٥٢}$

(٦) ممن يلعبون أحد اللعبتين على الاقل= $\frac{٤٢}{٥٢}$

(٧) ممن يلعبون اللعبتين معا = $\frac{٨}{٥٢}$

(٨) ممن يلعبون أحد اللعبتين فقط = $\frac{٣٤}{٥٢}$

(٩) ممن يلعبون أحدى اللعبتين على الاكثر = $\frac{٤٤}{٥٢}$

(١٠) ممن لا يلعبون السلة = $\frac{٣٢}{٥٢}$

(١١) ممن لا يلعبون أيا من اللعبتين = $\frac{١٠}{٥٢}$

****

تـــدريب : فصل دراسى به ٤٨ طالب نجح منهم ٣٠ طالب فى التاريخ ، ٢٠ طالب فى الفلسفة ٧ طلاب فى المادتين معا فإذا أختير طالب واحد عشوائيا من هذا الفصل أوجد احتمال ان يكون الطالب المختار

(١) ناجحا فى التاريخ
(٢) ناجحا فى الفلسفة
(٣) ناجحا فى المادتين معا
(٦) ناجحا فى أحد المادتين فقط
(٧) ناجحا فى أحد المادتين على الاكثر
(٨) راسبا فى التاريخ

(٤) ناجحا فى أحد المادتين على الاقل		(٩) راسبا فى الفلسفة
(٥) ناجحا فى التاريخ فقط		(١٠) راسبا فى المادتين معا

****

مثـــ١٥ــال : صمم حجر نرد بحيث يكون أحتمال ظهور أى عدد يكون متناسبا مع هذا العدد أوجد أحتمال ظهور عدد فردى

الحـــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ل(١) = س ، ل(٢) = ٢س ، ل(٣) = ٣س

ل(٤) = ٤س ، ل(٥)=٥س ، ل(٦) = ٦س

∴ س + ٢س + ٣س + ٤س + ٥س + ٦س = ١		٢١س = ١		س = $\frac{١}{٢١}$

ل(١) = $\frac{١}{٢١}$		ل(٢) = $\frac{٢}{٢١}$		ل(٣) = $\frac{٣}{٢١}$

ل(٤) = $\frac{٤}{٢١}$		ل(٥) = $\frac{٥}{٢١}$		ل(٦) = $\frac{٦}{٢١}$

حدث ظهور عدد فردى { ١ ، ٣ ، ٥ }

= ل(١) + ل(٣)+ل(٥) = $\frac{١}{٢١}$ + $\frac{٣}{٢١}$ + $\frac{٥}{٢١}$ = $\frac{٩}{٢١}$

****

مثـــ١٦ــال : صمم حجر نرد بحيث يكون أحتمال ظهور أى عدد فردى ضعف أحتمال ظهور أى عدد زوجى أوجد أحتمال ظهور عدد أولى

الحـــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ل(٢) = ل(٤) = ل(٦) = س		، ل(١) = ل(٣) = ل(٥) = ٢ س

ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٥) + ل(٦) =١

٢س + س + ٢ س + س + ٢ س + س = ١

٩س = ١		س= $\frac{١}{٩}$

ل(٢) = ل(٤) = ل(٦) = $\frac{١}{٩}$		، ل(١) = ل(٣) = ل(٥) = $\frac{٢}{٩}$

أحتمال ظهور عدد أولى {٢ ، ٣ ، ٥}

= ل (٢) + ل (٣) + ل (٥) = $\frac{١}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ = $\frac{٥}{٩}$

تمـــارين

[١] إذا كان ٲ ، ب حدثين من ف ، ل(ٲ) = $\frac{١}{٤}$ ؛ ل(ٲ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

أوجد ل(ب) إذا كان : (١) ٲ ، ب حدثين متنافيين (٢) ٲ ⊂ ب

[٢] إذا كان ٲ ، ب حدثين من ف ، ل(ٲ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(ٲ ∩ ب) = ٠,٤

أوجد إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

[٣] إذا كان ٲ ، ب حدثين من ف ، ل(ٲ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل(ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل(ٲ ∪ ب) = $\frac{١}{٨}$

أوجد إحتمال وقوع الحدثين معاً

[٤] إذا كان ٲ ، ب حدثين من ف ، ل(ٲ) = $\frac{١}{٥}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد ل(ٲ ∪ ب) فى الحالات التالية : (١) ل(ٲ ∩ ب) = $\frac{١}{٢٠}$ (٢) ٲ ، ب حدثين متنافيين

[٥] إذا كان ٲ ، ب حدثين من ف ، ل(ٲ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(ٲ ∪ ب) = ٠,٧

أوجد ل(ٲ ∩ ب)

[٦] لوحة دوارة مقسمة إلى ٧ أقسام متساوية مدون عليها الأرقام من ١ إلى ٧ ، إذا كان ٲ حدث توقف المؤشر عند عدد زوجى ، ب حدث توقف المؤشر عند عدد زوجى ، حـ حدث توقف المؤشر عند عدد يقبل القسمة على ٢

أوجد : ل(ٲ ∩ ب) ، ل(ٲ ∩ حـ) ، ل(ب ∩ حـ)

[٧] ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة و كان ٲ هو حدث ظهور عدد زوجى على الوجه الظاهر ، ب هو حدث ظهور عدد أكبر من ٣ على الوجه الظاهر أوجد ل(ٲ ∪ ب)

[٨] يصوب لاعبان ٲ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان إحتمال أن يصيب اللاعب ٲ الهدف هو $\frac{٢}{٥}$ ، إحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو $\frac{١}{٤}$ ، إحتمال أن يصيب اللاعبان الهدف معا هو $\frac{١}{٦}$ أوجد إحتمال أن إصابة الهدف من أحد اللاعبين على الأقل

[٩] فصل دراسى به ٤٠ طالبا نجح منهم ١٧ طالبا فى إمتحان العلوم ، ٢٠ طالبا فى إمتحان الرياضيات ،٥ طلاب منهم فى الامتحانين معا أختير طالب منهم عشوائيا أوجد إحتمال أن يكون الطالب المختار: (١) ناجحا فى العلوم (٢) ناجحا فى الرياضيات (٣) ناجحا فى كلا الامتحانين

[١٠] أشترك ثلاثة لاعبين ﻫ ، ب ، جـ فى إحدى السباقات فإذا كان إحتمال فوز ﻫ = $\frac{١}{٢}$ إحتمال فوز ب ، إحتمال فوز ﻫ = ٢ إحتمال فوز جـ أوجد إحتمال فوز ﻫ أو جـ علما بأن واحد فقط هو الفائز

[١١] أشترك ثلاثة لاعبين ﻫ ، ب ، جـ فى إحدى السباقات فإذا كان إحتمال فوز ﻫ = ضعف إحتمال فوز ب ، إحتمال فوز ب = إحتمال فوز جـ أوجد إحتمال فورب أو جـ علما بأن واحد فقط هو الفائز

[١٢] صمم حجر نرد بحيث عند إلقائه يكون إحتمال ظهور كل من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ متساو ، إحتمال ظهور العدد ٦ يساوى ثلاثة أمثال إحتمال ظهور العدد ١ أوجد إحتمال ظهور عدد زوجى

[١٣] سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٣٠ اوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً : (١) يقبل القسمة علي ٣ (٢) يقبل القسمة علي ٥

(٣) يقبل القسمة علي ٣ و يقبل القسمة على ٥

(٤) يقبل القسمة علي ٣ أو يقبل القسمة على ٥

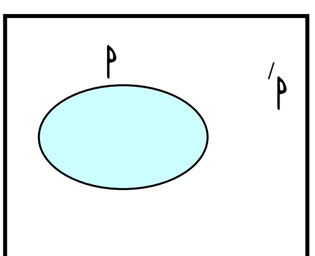
[١٤] سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٣٠ اوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً : (١) زوجيا ويقبل القسمة علي ٥

(٢) يقبل القسمة علي ٣ أو ٥

****

الحدث المكمل و الفرق بين حدثين

الحدث المكمل



[١] فى الشكل المقابل :

إذا كانت ف المجموعة الشاملة ، ٮ ⊂ ف فإن :

مكملة المجموعة ٮ هى ٮ/

و يكون : ٮ ∩ ٮ/ = ∅ ، ٮ ∪ ٮ/ = ف

فمثلاً :

إذا كانت : ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ٮ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ }

فإن : ٮ/ = { ٣ ، ٥ }

و بالتالى يكون : ل(ٮ) = $\frac{٤}{٦}$ ، ل(ٮ/) = $\frac{٢}{٦}$

و يلاحظ أن : ل(ٮ) + ل(ٮ/) = $\frac{٤}{٦}$ + $\frac{٢}{٦}$ = ١

الحدث المكمل :

الحدث المكمل للحدث ٮ هو ٮ/ و هو حدث عدم وقوع ٮ

أى أن : إذا كان ٮ ⊂ ف فإن : ٮ/ هو الحدث المكل للحدث ٮ

حيث : ٮ ∩ ٮ/ = ∅ ، ٮ ∪ ٮ/ = ف

و يلاحظ أن : الحث و الحث المكمل له هما حدثان متنافيان

ويكون : ل(ٮ) = ١ – ل(ٮ/) ، ل(ٮ/) = ١ – ل(ٮ)

****

مثــ١ـال : إذا كان ٮ ، ب حدثين من ف ، ل(ٮ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤

أوجد : ل(ٮ/) ، ل(ب/)

الحـــــــــل

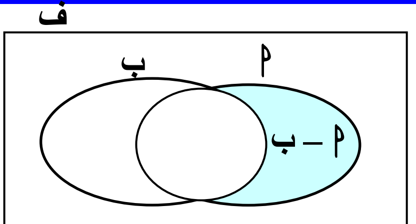
ل(ٮ/) = ١ – ل(ٮ) = ١ – ٠,٧ = ٠,٣

ل(ب/) = ١ – ل(ب) = ١ – ٠,٤ = ٠,٦

****

الفرق بين حدثين

[٢] فى الشكل المقابل :



إذا كانت ف المجموعة الشاملة ، ٮ ، ب ⊃ ف

فإن : الجزء المظلل يرمز له بالرمز " ٮ – ب " (و يقرأ ٮ فرق ب)

فمثلاً :

إذا كانت : ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

، ٮ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ب = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ }

فإن : ٮ – ب = { ٣ ، ٦ }   و يكون : ل (ٮ – ب) = $\frac{٢}{٦}$

الفرق بين حدثين :

إذا كان ٮ ، ب حدثين من ف فإن : ٮ – ب

هو حدث وقوع ٮ و عدم وقوع ب أى حدث وقوع ٮ فقط

لاحظ أن : (ٮ – ب) ∪ (ٮ ∩ ب) = ٮ

و بالتالى يكون : ل (ٮ – ب) + ل (ٮ ∩ ب) = ل (ٮ)

أى أن :   ل (ٮ – ب) = ل (ٮ) – ل (ٮ ∩ ب)

****

مثـ٢ـال : إذا كان ٮ ، ب حدثين من ف ، ل(ٮ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(ٮ ∩ ب) = ٠,٤ أوجد : ل (ٮ – ب) ، ل (ب – ٮ)

الحـــــــل

ل (ٮ – ب) = ل (ٮ) – ل (ٮ ∩ ب) = ٠,٦ – ٠,٤ = ٠,٢

ل (ب – ٮ) = ل (ب) – ل (ٮ ∩ ب) = ٠,٧ – ٠,٤ = ٠,٣

****

مثـ٣ـال : إذا كان ٮ ، ب حدثين من ف ، ل(ٮ) = ٠,٧ ، (ٮ – ب) = ٠,٣

أوجد : ل (ٮ ∩ ب)

الحـــــــل

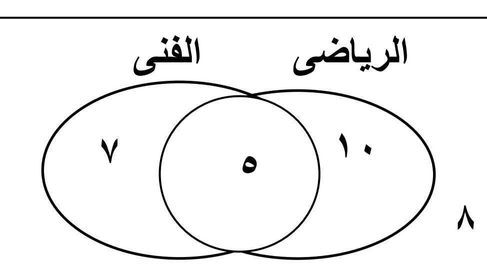
∵ ل (ٮ – ب) = ل (ٮ) – ل (ٮ ∩ ب)

∴ ٠,٣ = ٠,٧ – ل (ٮ ∩ ب)

∴ ل (ٮ ∩ ب) = ٠,٧ – ٠,٣ = ٠,٤

مثــ٤ــال : فصل دراسى به ٣٠ طالبا منهم ١٥ طالبا يمارسون النشاط الرياضى ؛ ١٢ طالبا يمارسون النشاط الفنى ، ٥ يمارسون النشاطين معا اختير منهم طالب عشوائيا مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن يكون الطالب المختار


[١] يمارس النشاط الرياضى فقط



[٢] لا يمارس النشاط الفنى

[٣] لا يمارس النشاطين معاً

[٤] يمارس كلا النشاطين

[٥] لا يمارس أى نشاط

الحـــــــل

من الشكل المقابل :

[١] إحتمال أن يكون الطالب المختار يمارس النشاط الرياضى فقط $= \frac{١٠}{٣٠} = \frac{١}{٣}$

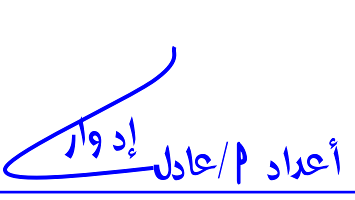
[٢] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس النشاط الفنى $= \frac{٢٣}{٣٠}$

[٣] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس النشاطين معاً $= \frac{٢٥}{٣٠} = \frac{٥}{٦}$

[٤] إحتمال أن يكون الطالب المختار يمارس كلا النشاطين $= \frac{٢٢}{٣٠} = \frac{١١}{١٥}$

[٥] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس أى نشاط $= \frac{٨}{٣٠} = \frac{٤}{١٥}$

****



تمارين

(١) أكمل ما يلى :

[١] إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان فإن : ل (أ ∩ ب) = ٠٠٠٠٠

[٢] إذا كان : إحتمال وقوع الحدث أ هو ٤٠ ٪ فإن : إحتمال عدم وقوعه = ٠٠٠

[٣] إذا كان : ل(أ) = ل(أ′) فإن : ل(أ) = ٠٠٠٠٠

[٤] إذا كان : أ ⊂ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ٠٠٠٠٠

[٥] إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان ، و كان : ل(أ) = ١/٤ ، ل (أ ∪ ب) = ٧/١٢
فإن : ل (ب) = ٠٠٠٠٠

[٦] إذا كان : أ ، ب حدثين من ف ، و كان : ل(أ) = ٠,٨ ،
ل (أ − ب) = ٠,٣ فإن : ل (أ ∩ ب) = ٠٠٠٠٠

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٣
أوجد : ل(ب′) ، ل (أ − ب)

(٣) إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل (أ′) = ٥/٨ ، ل(ب) = ١/٣ ، ل(أ ∩ ب) = ١/٤
أوجد : ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) ، ل (أ − ب) ،
ل (ب − أ) ، ل (أ ∩ ب)′

(٤) إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ′) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(أ − ب) = ٠,١
أوجد ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) ، ل (أ ∪ ب)′ ، ل (أ − ب)

(٥) إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ′) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٦
أوجد [١] إحتمال عدم وقوع الحدثين معاً
[٢] إحتمال وقوع الحدث أ فقط
[٣] إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

(٦) تقدم ٥٠ شخصاً لشغل إحدى الوظائف فوجد أن ٣٥ منهم يجيدون اللغة الإنجليزية ، ٢٠ منهم يجيدون اللغة الفرنسية ، ١٥ منهم يجيدون اللغتين معا أختير شخص منهم عشوائيا مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن يكون هذا الشخص :

[١] يجيد الإنجليزية فقط

[٢] لا يجيد الفرنسية

[٣] يجيد إحدى اللغتين على الأقل

(٧) فى دراسة إحصائية لمشاهدة أحد البرامج الثقافية فى التلفاز وجد أن إحتمال أن يشاهد زوج وزوجته معاً البرنامج هو ٠,٣٥ ، إحتمال أن يشاهد الزوج البرنامج هو ٠,٤ ، إحتمال أن تشاهد الزوجة البرنامج هو ٠,٥ مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن :

[١] تشاهد الزوجة فقط البرنامج

[٢] لا يشاهد الزوج البرنامج

[٣] كلاهما يشاهدان البرنامج

(٨) كيس يحتوى على ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ ، ٦ كرات حمراء مرقمة من ٩ إلى ١٤ سحبت كرة عشوائيا منه أوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

[١] بيضاء أو تحمل رقماً فردياً

[٢] حمراء و تحمل رقماً زوجياً

(٩) أشترك ٦٠ شاباً فى احد مراكز الشباب فى الأنشطة الرياضية منهم ٣٦ شاباً فى فريق كرة القدم ، ٢٧ شاباً فى فريق كرة السلة ، ١٢ شاباً فى الفريقين معاً ، أختير شاب من هذا المركز عشوائياً مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن يكون الشاب المختار :

[١] مشترك فى فريق كرة القدم فقط

[٢] مشترك فى فريق واحد على الأقل من الفريقين

[٣] غير مشترك فى أى من الفرق السابقة